

Quantenfeldtheorie auf Raumzeiten mit Topologieänderungen

(Quantum field theory in topology changing spacetimes)

Diplomarbeit

vorgelegt von

Werner Bauer

Dezember 2006

II. Institut für theoretische Physik
Universität Hamburg

Gutachter der Diplomarbeit:

Prof. Dr. K. Fredenhagen

Prof. Dr. J. Louis

Abstract

The goal of this diploma thesis is to present an overview of how to reduce the problem of topology change of general spacetimes to the investigation of elementary cobordisms. In the following we investigate the possibility to construct quantum fields on elementary cobordisms, in particular we want to discuss the trousers topology. Trying to avoid the problems occurring at spacetimes with instant topology change we use a model for simulating topology change. We construct the algebra of observables for a free scalar field with the algebraic approach to quantum field theory. Therefore we determine a fundamental solution of the field equation.

Zusammenfassung

Ziel dieser Diplomarbeit ist es, einen Überblick zu geben, wie das Problem der Topologieänderungen von Raumzeiten auf die Untersuchung elementare Kobordismen zurückgeführt werden kann. Diese werden im Anschluss daran auf die Möglichkeit untersucht, ob auf ihnen eine wohldefinierte Quantenfeldtheorie konstruieren werden kann, insbesondere wird die zweidimensionale Hosentopologie Gegenstand unserer Diskussion sein. Um die Probleme einer instantanen Topologieänderung zu umgehen, wird anhand eines einfachen Modells, das die Hosentopologie vereinfacht wiedergeben soll, eine Topologieänderung simuliert. Für dieses Modell wird die Observablenalgebra eines freien skalaren Feldes mithilfe des algebraischen Zugangs zur Quantenfeldtheorie bestimmt. Dazu bestimmen wir eine Fundamentallösung der Feldgleichung.

Inhaltsverzeichnis

Einführung	7
1 Topologieänderung von Raumzeiten	11
1.1 Kausale Struktur der Raumzeit	11
1.2 Interpolierende Raumzeiten	13
1.2.1 Kobordismen	14
1.2.2 Beschreibung einer zeitlichen Entwicklung	15
1.3 Eigenschaften der interpolierenden Raumzeiten	17
1.3.1 Theorem von Geroch	17
1.3.2 Kausalität vs. Äquivalenzprinzip	18
1.4 Morse-Raumzeiten	19
1.4.1 Morse-Funktion	19
1.4.2 Zerlegung von Kobordismen	21
1.5 Kausale Struktur von Kobordismen	23
1.5.1 Verschiedene Kausalitätsbedingungen	23
1.5.2 Kausale Stetigkeit	24
1.5.3 Die Sorkin und die Borde-Sorkin Vermutungen	25
2 Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit	27
2.1 Algebraischer Zugang zur Quantenfeldtheorie	28
2.1.1 Die Algebra der Observablen	28
2.1.2 Zustände	29
2.2 Das lineare skalare Feld	30
2.2.1 Die Formulierung mit Anfangswerten	30
2.2.2 Die kovariante Feldgleichung	31
2.2.3 Die Konstruktion der Algebra	33
3 Quantenfeldtheorien auf Raumzeiten mit Topologieänderungen	35
3.1 Quantenfeldtheorie auf den elementaren Kobordismen	36
3.1.1 Modenzerlegung mit Randbedingungen	36
3.1.2 Die Pfadintegralmethode	37
4 Modell zur Simulation einer Topologieänderung	39
4.1 Simulation einer Topologieänderung	39
4.2 Die Feldgleichungen	40
4.2.1 Allgemeine Herleitung	40
4.2.2 Feldgleichung des Modells	41

4.3	Die Bestimmung der Fundamentallösung	42
4.3.1	Die Wellengleichung	42
4.3.2	Ansatz einer geometrischen Reihe	43
4.4	Berechnung des klassischen Energie-Impuls-Tensors	50
4.4.1	Energie-Impuls-Tensor im allgemeinen Fall	50
4.4.2	Energie-Impuls-Tensor des Modells	51
4.4.3	Energieflußdichte des Modells	53
5	Zusammenfassung und Ausblick	57
A	Ableitungen	59
A.1	Ableitungen im Sinne von Distributionen	59
A.2	Die Ableitungen des Feldes	66

Einführung

Eine Quantentheorie der Gravitation sollte die Erkenntnisse der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) und der Quantenmechanik in sich vereinen. Die Vorhersagen beider Theorien wurden bisher durch viele Experimente mit hoher Präzision bestätigt. Sie widersprechen sich jedoch in gewissen Teilen, weil sie auf unterschiedlichen Annahmen basieren. Quantentheorien werden auf einem fest gewählten Hintergrund definiert, wobei sich die Felder bezüglich eines äußeren Parameters, der Zeit, entwickeln. In der ART hingegen ist der Hintergrund, eine Mannigfaltigkeit mit Lorentz-Metrik, selbst ein dynamisches, deterministisches Feld. Der deterministische Charakter des glatten Feldes, das den Einstein-Gleichung genügt, widerspricht aber den Forderungen der Quantentheorie, in der jedes dynamische Feld eine quantisierte Größe ist.

Auf dem Weg zu einer Quantentheorie der Gravitation kann man verschiedene Richtungen einschlagen. Ausgehend von der hintergrundunabhängigen Formulierung der ART kann ein Konzept zur Quantisierung der klassischen Lösung der Einstein-Gleichungen entwickelt werden. Dieser Weg in Richtung einer Quantengravitation wird im Besonderen von der Theorie der Schleifen-Quantengravitation bevorzugt [1]. Die ART ist eine klassische Feldtheorie und beschreibt die Raumzeit als dynamische Größe, dabei hängt die Struktur der Raumzeit von der Massenverteilung über die Einstein-Gleichungen ab. Ausgehend von den Konzepten der Quantenmechanik wird versucht, das klassische dynamische Feld, das durch die Metrik bestimmt wird, zu quantisieren. Dabei stößt man allerdings auf große Probleme, da die Raumzeit selbst, und nicht ein Feld auf der Raumzeit, zu quantisieren ist [1].

Eine weitere Annäherung an die Vereinheitlichung von Quantenmechanik und ART ist, dass man auf die Ergebnisse der Quantentheorie aufbaut. Die Quantenfeldtheorie auf flacher Raumzeit macht sehr erfolgreich Aussagen über die Elementarteilchen und deren Wechselwirkungen. Mithilfe von störungstheoretischen Rechnungen können Wirkungsquerschnitte sehr genau berechnet werden. Es soll allerdings nicht verschwiegen werden, dass Probleme bei der mathematischen Formulierung auftreten, die bis heute nicht gelöst sind. Trotzdem ist das Standardmodell ein großer Erfolg der Quantenfeldtheorie. Zur Formulierung einer Quantengravitation ausgehend von Quantenfeldtheorien versucht man diese hintergrundunabhängig zu formulieren [2].

Beim Übergang von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik treten neue Effekte in Erscheinung. So können Ort und Impuls aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation nicht gleichzeitig scharf gemessen werden. Zusätzlich gestattet diese Unschärferelation der Energiedichte für kurze Zeiten negativ zu werden, was in der klassischen Mechanik zu keiner Zeit erlaubt ist. Ähnliche neue Phänomene sind auch bei der Quantisierung der klassischen

Lösungen der Einstein-Gleichungen zu erwarten. Wheeler schlug bereits 1957 vor, dass durch die Quantenfluktuationen der Raumzeit sich deren Topologie verändern kann [3].

Es stellt sich die Frage, ob und unter welchen Umständen es Raumzeiten mit Topologieänderungen gibt und ob diese dann Lösungen der Einstein-Gleichung sind. Es gibt einige Ergebnisse, die gegen eine Möglichkeit der Topologieänderung sprechen. Geroch [4] hat gezeigt, dass, unabhängig von Feldgleichungen, eine Raumzeit mit Topologieänderung zwischen zwei Hyperflächen geschlossenen zeitartigen Kurven oder Singularitäten besitzt und Tipler [5] zeigte, dass bei Forderung der Einstein-Gleichung oder auch nur der schwachen Energiebedingung es bei allgemeiner Änderung einer Raumzeittopologie zu Singularitäten kommt. Aufbauend auf diesen Ergebnissen hat Borde bewiesen, dass kausal kompakte Raumzeiten, die ihre Topologie ändern, keine Lösungen der Einstein-Gleichungen sein können [6].

Trotz der eben erwähnten Ergebnisse muss die Möglichkeit der Topologieänderungen von Raumzeiten nicht prinzipiell ausgeschlossen werden. Durch leichte Modifikationen an die Bedingungen, die man an Raumzeiten stellt, können die Obstruktionen umgangen werden. Es gibt dafür mehrere Möglichkeiten, beispielsweise kann die schwache Energiebedingung und die Kausalitätsbedingung [7] aufgegeben werden. Auch wurden Versuche unternommen, die Lorentz-Metrik durch eine euklidische Metrik zu ersetzen, wobei allerdings die kausale Struktur aufgegeben wird. Unter Verwendung einer entarteten Metrik konnte Horowitz [8] zeigen, dass die ART im Tetraden-Formalismus klassische Lösungen besitzt, welchen Raumzeiten mit Topologieänderungen entsprechen, auf denen eine entarteten Lorentz-Metrik existiert.

Im Zuge der Formulierung einer Quantengravitation ist es wichtig, das Verhalten des Gravitationsfeldes, das die Raumzeit beschreibt zu untersuchen. Die Untersuchung von Quantenfeldern auf Raumzeiten mit Topologieänderungen erweist sich allerdings als sehr schwierig. Als vereinfachte Annahme betrachteten deshalb Anderson und DeWitt [9] ein freies skalares Feld, das sich auf der Hosentopologie befindet, stellvertretend für ein quantisiertes Gravitationsfeld. Das Ergebnis, dass der Energieimpulstensor des freien Feldes divergiert, wurde von Manogue, Copeland und Dray [10] bestätigt. Aufgrund dieser Berechnungen wurde von Sorkin (vgl. [11]) eine Vermutung aufgestellt, dass es keine wohldefinierten Quantenfelder auf Raumzeiten mit Eigenschaften ähnlich denen der Hose gibt.

Das Konzept der Quantenfeldtheorie auf gekrümmte Raumzeiten ist ein allgemeinerer Zugang als bei der herkömmlichen Hilbertraum-Formulierung von Quantenfeldtheorien. Das Problem, dass auf einer beliebig gekrümmten Raumzeit keine Symmetriegruppe zur Auszeichnung eines bevorzugten Vakuumzustands existiert, mit dem ein entsprechender Hilbertraum gewählt werden kann, konnte mit dem algebraischen Zugang umgangen werden. Damit ist eine neue Möglichkeit entstanden, Quantenfeldtheorien auf gekrümmten Raumzeiten zu definieren. Die Versuche der Definition einer Quantenfeldtheorie auf Raumzeiten mit Topologieänderungen basierten zumeist auf einer herkömmlichen Hilbertraum-Formulierung [9, 10]. Es besteht wegen der Unabhängigkeit der algebraischen Formulierung von einem Hilbertraum die Chance der Definition einer Quantenfeldtheorie [12], welche dem Problem der Topologieänderung besser angepasst sein könnte als die herkömmliche Formulierung. Dieser Idee folgend soll anhand der algebraischen Formulierung ein Modell entwickelt werden, indem die Topologieänderung in Form von Randbedingungen an die Felder simuliert wird. Die Topologieänderung der unterliegenden Mannigfaltigkeit bleibt unverändert. Diese Idee wurde von Balachandran, Bimonte,

Marmo und Simoni in [13] auf die Quantenmechanik angewandt. In der Arbeit von Braunstein [14] wurde diese Idee der Simulation ebenfalls verwendet, worauf schließlich das in dieser Arbeit entwickelte Modell basiert.

Die Arbeit gliedert sich in zwei Bereiche. Im ersten Teil betrachten wir ausführlich die rein geometrischen Eigenschaften von Raumzeiten und untersuchen deren kausales Verhalten. Dies motiviert die Betrachtung von sogenannten elementaren Kobordismen zur Definition von Quantenfeldern. Im zweiten Teil diskutieren wir, nach einer kurzen Einführung in die Konzepte der algebraischen Quantenfeldtheorie, die Probleme, die bei der Definition von Quantenfeldern auf diesen Kobordismen, insbesondere bei der 1+1 Hosentopologie, in der herkömmlichen Formulierung der Quantenfeldtheorie auftreten. Unter Verwendung des konzeptionellen Vorteils der algebraischen Methode können wir eine Observablenalgebra für ein vereinfachtes Modell der Hosentopologie definieren.

Im folgenden Kapitel werden wir eine ausführliche Diskussion über die Möglichkeit führen, wie man bei Raumzeiten von Topologieänderung sprechen kann. Dafür wird der Begriff einer zeitlichen Entwicklung einer Hyperfläche präzisiert, woran eine Definition für Topologieänderung gegeben werden kann. Wir diskutieren die Bedingungen für die Existenz solcher Raumzeiten und deren Eigenschaften. Wir werden uns dabei im wesentlichen an [6] orientieren, worin die Theoreme von Geroch [4], die ursprünglich für 4 Dimensionen bewiesen wurden, auf n Dimensionen verallgemeinert werden. Weiterhin schränken wir uns auf die Untersuchung von sogenannten Kobordismen ein, da diese mathematisch gut untersucht sind. Wir werden erklären wie Kobordismen in elementare Bestandteile zerlegt werden können, wobei wir im wesentlichen den Ausführungen in [15] folgen. Diese sogenannten elementaren Kobordismen werden wir auf ihr kausales Verhalten untersuchen und geben die Ergebnisse entsprechend [16, 17] an.

In Kapitel 2 werden wir eine Einführung in die algebraische Formulierung der Quantenfeldtheorie liefern. Wir folgen dabei im wesentlichen dem Skript von Fredenhagen [18] und wollen den konzeptionellen Vorteil der algebraischen Quantenfeldtheorie bei der Definition von Quantentheorien auf gekrümmter Raumzeit gegenüber dem herkömmlichen Hilbertraum-Formalismus erklären. Auf die Schwierigkeiten bei der Suche nach geeigneten Zuständen wollen wir nicht weiter eingehen. Im Anschluss daran, werden wir die Eigenschaften des linearen skalaren Feldes entsprechend [19] angeben. Es ergeben sich die Vertauschungsrelationen, die eindeutig durch die Bestimmung einer Fundamentallösung auf einer global hyperbolischen Raumzeit festgelegt sind. Schließlich wollen wir die Konstruktion der Algebra explizit angeben.

Quantenfelder auf elementaren Kobordismen wurden bis heute im wesentlichen nur in zwei Dimensionen vollständig untersucht. Wir wollen in Kapitel 3 kurz die Ansätze zur Definition von Quantenfeldern für die Hosentopologie von Anderson und DeWitt [9] und zum anderen von Manogue, Copeland und Dray [10] angeben und erwähnen die konzeptionellen Schwierigkeiten.

Schließlich wird in Kapitel 4 ein Modell zur Simulation einer Topologieänderung entwickelt.

Als Motivation zur Behandlung von kontinuierlichen Topologieänderungen wird die Idee von Braunsteins Modell [14] erläutert. Ausgehend von einer Lagrangedichte zur Beschreibung solch eines Modells wird die Feldgleichung abgeleitet. Es läßt sich, wie wir beweisen werden, eine Fundamentallösung für diese Feldgleichung finden, womit die Algebra der Observablen aufgestellt werden kann. Zum Abschluss wird das Verhalten des klassischen Energieimpulstensors untersucht.

Kapitel 1

Topologieänderung von Raumzeiten

In diesem Kapitel werden Raumzeiten auf die Möglichkeit von Topologieänderungen untersucht. Ausgehend von beliebigen Raumzeiten werden wir den Begriff der interpolierenden Raumzeit definieren. Wir sind damit in der Lage, den Begriff der Topologieänderung einzuführen. Es sind allerdings gewisse Einschränkungen an die Existenz solcher Raumzeiten gestellt, die wir diskutieren wollen. Außerdem werden wir den Raumzeitbereich, indem sich die Topologie ändern kann, auf ein kompaktes Gebiet einschränken. Das führt dazu, dass wir das Problem der Topologieänderung auf die Behandlung von Kobordismen zurückführen können. Wie sich herausstellt, können diese mit Hilfe der sogenannten Morse-Theorie in elementare Bestandteile zerlegt werden, die besondere Eigenschaften aufweisen. Wir werden eine Begründung für dieses Vorgehen liefern und wollen abschließend das kausale Verhalten der elementaren Bestandteile der Kobordismen untersuchen.

1.1 Kausale Struktur der Raumzeit

Wir betrachten eine differenzierbare Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , d.h. \mathcal{M} besitzt einen maximalen \mathcal{C}^∞ -Atlas. \mathcal{M} ist ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis. Bezüglich der Topologie ist \mathcal{M} hausdorff und parakompakt.¹

Unter einer *Lorentz-Mannigfaltigkeit* verstehen wir eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Metrik g mit Signatur $(+, -, \dots, -)$. Die Lorentz-Metrik g ist eine Abbildung, die jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ eine nichtentartete symmetrische Bilinearform $g_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Tangentialraum $T_p\mathcal{M}$ zuordnet.

Die Elemente aus dem Tangentialraum $v \in T_p\mathcal{M}$ lassen sich aufgrund der Metrik g unterteilen in zeitartige Vektoren, falls $g_p(v, v) > 0$, lichtartige Vektoren, falls $g_p(v, v) = 0$, und raumarartige Vektoren, falls $g_p(v, v) < 0$. An jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ läßt sich die Menge der zeitartigen Vektoren in $T_p\mathcal{M}$ in zwei Zusammenhangskomponenten aufteilen. Eine *Zeitorientierung* auf \mathcal{M} ist eine Wahl einer der beiden Zusammenhangskomponenten der zeitartigen Vektoren aus $T_p\mathcal{M}$, die stetig von p abhängt. Das heißt, dass man ein stetiges zeitartiges Vektorfeld auf \mathcal{M} finden kann, dessen Vektoren in den ausgewählten Zusammenhangskomponenten sind. Diese Vektoren bezeichnen wir als *zukunftsgerichtet*, die Vektoren in der anderen Komponente als

¹Daraus folgt unmittelbar, dass eine glatte positiv definite Metrik h_g existiert [6].

vergangenheitsgerichtet.

Wir wollen im Folgenden die *abstrakte Indexnotation* verwenden. Die Lorentz-Metrik g ist ein symmetrischer Tensor von Typ (0,2) und wird mit g_{ab} bezeichnet. Vektoren werden wir mit V^a bezeichnen, da es sich um Tensoren von Typ (1,0) handelt, also Elemente aus $T_p\mathcal{M}$ (vgl. [20]).

Eine wichtige Eigenschaft, die uns später ermöglichen wird von einer zeitlichen Entwicklung von Raumzeiten zu sprechen, wollen wir hier angeben. Eine Mannigfaltigkeit \mathcal{M} besitzt genau dann eine zeitorientierbare glatte Lorentz-Metrik g_{ab} , falls eine glattes nichtverschwindendes Vektorfeld V^a auf ganz \mathcal{M} existiert [21]. Dies läßt sich wie folgt erklären: Wir können aus einer positiv definiten Metrik h_{ab} , die immer wegen der Parakompaktheit von \mathcal{M} existiert, und einem nichtverschwindenden zeitartigen Vektorfeld V^a eine Lorentz-Metrik konstruieren. Ist V^a gegeben, so kann mit h_{ab} eine Lorentz-Metrik

$$g_{ab} = (h_{cd}V^cV^d)h_{ab} - 2h_{ac}V^c h_{bd}V^d$$

definiert werden. V^a ist zeitartig im Bezug auf g_{ab} . Den ausführlichen Beweis findet man in [6].

Definitionen zur Kausalität

Auf der zeitorientierten Lorentz-Mannigfaltigkeit existiert eine kausale Struktur, womit sich folgende Begriffe definieren lassen.

Eine *zeitartige* Kurve in einer Raumzeit (\mathcal{M}, g_{ab}) ist eine differenzierbare Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, deren Tangentenvektoren überall zeitartig sind. Bei einer *kausalen* Kurve sind dementsprechend die Tangentialvektoren überall zeit- oder lichtartig. Eine zeitartige oder kausale Kurve, die bei $x \in \mathcal{M}$ startet, heißt *nichtzukunftsweiterbar*, falls es keinen Zukunfts-Endpunkt in \mathcal{M} gibt, außer möglicherweise auf dem finalen Rand von \mathcal{M} . Man definiert analog *nichtvergangenheitsweiterbar*. Seien $x, y \in \mathcal{M}$, dann schreiben wir $x \ll y$, falls eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve von x nach y existiert, und wir schreiben $x < y$ falls eine zukunftsgerichtete kausale Kurve von x nach y existiert.

Die *chronologische* Zukunft eines Punktes $x \in \mathcal{M}$ bezeichnen wir als $I^+(x) = \{y \in \mathcal{M} : x \ll y\}$, und für die *kausale* Zukunft schreiben wir $J^+(x) = \{y \in \mathcal{M} : x < y\}$. Wiederum sind die *chronologische* und *kausale* Vergangenheit analog definiert.

Die *gemeinsame Vergangenheit* einer offenen Menge S ist $\downarrow S \equiv \text{Int}(\{q : q \ll s \forall s \in S\})$, die *gemeinsame Zukunft* wird dementsprechend definiert. Es gilt $I^-(x) \subset \downarrow I^+(x)$ und $I^+(x) \subset \uparrow I^-(x)$.

Sei eine abgeschlossene Menge V auf (\mathcal{M}, g_{ab}) gegeben. Der *kausale Zukunfts-Abhängigkeitsbereich* von V , bezeichnet mit $D^+(V)$, ist die Menge von Punkten $x \in \mathcal{M}$ für die jede nichtvergangenheitsweiterbare kausale Kurve durch x die Menge V schneidet. Analog wird der *kausale Vergangenheits-Abhängigkeitsbereich* $D^-(V)$ definiert. Die Vereinigung, $D(V) = D^+(V) \cup D^-(V)$, ist der *kausale Abhängigkeitsbereich* von V .

1.2 Interpolierende Raumzeiten

Wir wollen, ausgehend vom zunächst abstrakten Begriff der interpolierenden Raumzeit, einen Mechanismus zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung von Hyperflächen von Raumzeiten entwickeln und untersuchen, unter welchen Bedingungen interpolierende Raumzeiten existieren. Wir wählen einen sehr allgemeinen Zugang, der auch zur Beschreibung kosmologischer Modelle geeignet ist und beschränken uns später auf Kobordismen, da deren Eigenschaften gut bekannt sind. Zunächst aber der abstrakte Begriff der interpolierenden Mannigfaltigkeit bzw. Raumzeit.

Definition 1.2.1. Seien S_1 und S_2 disjunkte $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten. Eine zusammenhängende n -dimensionale Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , mit disjunktem Rand, $\partial\mathcal{M} = S_1 \amalg S_2$, heißt *interpolierende Mannigfaltigkeit* zwischen S_1 und S_2 . Läßt sich auf dieser interpolierenden Mannigfaltigkeit zusätzlich eine glatte Lorentz-Metrik g_{ab} definieren, bezüglich der S_1 und S_2 raumartig sind, so heißt sie *interpolierende Raumzeit* und wir schreiben zur besseren Unterscheidung (\mathcal{M}, g_{ab}) .

Es ergibt sich, dass immer eine interpolierende Mannigfaltigkeit, auf der eine entsprechende Lorentz-Metrik definiert werden kann, existiert, falls keine Einschränkungen an die interpolierende Mannigfaltigkeit gestellt werden [6].

Dies folgt aus der Möglichkeit, mit der *zusammenhängenden Summe* neue interpolierende Mannigfaltigkeiten aus alten konstruieren zu können. Zur Bildung der zusammenhängenden Summe, in Zeichen $\mathcal{M}' = \mathcal{M}_1 \# \mathcal{M}_2$, von zwei n -dimensionale Mannigfaltigkeiten \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 , entfernt man eine n -dimensionale offene Kugel aus jeweils dem Inneren von \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 und identifiziert die dabei entstehenden Ränder miteinander. Darauf läßt sich ein glattes nichtverschwindendes Vektorfeld $V^a \in \mathcal{C}^\infty$ konstruieren, womit eine zeitorientierbare Lorentz-Metrik auf \mathcal{M}' definiert werden kann [6, 22].

Die Methode der zusammenhängenden Summe läßt sich allerdings beliebig fortsetzen, d.h. man kann weiterhin Kugeln entfernen, und die dadurch entstandenen Ränder identifizieren. Diese modifizierten Mannigfaltigkeiten interpolieren weiterhin zwischen S_1 und S_2 . Folglich hat die interpolierende Mannigfaltigkeit beliebige Form [6]. Um diese Willkür in der Wahl der interpolierenden Raumzeit einzuschränken, führen wir den Begriff der *kausalen Kompaktheit* ein.

Definition 1.2.2. Eine Raumzeit (\mathcal{M}, g_{ab}) heißt *kausal kompakt*, falls $\forall p \in \mathcal{M}$ die abgeschlossene Menge $\overline{I(p)}$ kompakt ist. Dabei gilt $\overline{I(p)} = \overline{I^+(p)} \cup \overline{I^-(p)}$ (vgl. Abbildung 1.1).

Die Forderung der kausalen Kompaktheit begrenzt die Anzahl der interpolierenden Raumzeiten auf jene, in denen keine n -dimensionalen offenen Kugeln beliebig entfernt und miteinander identifiziert werden dürfen.

Durch die Einschränkung auf kausal kompakte Raumzeiten hat man nun allerdings das Problem, dass man wiederum untersuchen muss, unter welchen Bedingungen eine interpolierende Raumzeit existiert. Stellt man die zusätzliche Einschränkung, dass S_1 und S_2 geschlossene Flächen (d.h. kompakt und ohne Rand) sind und \mathcal{M} kompakt ist, so ist die Kobordismen-Theorie anwendbar.

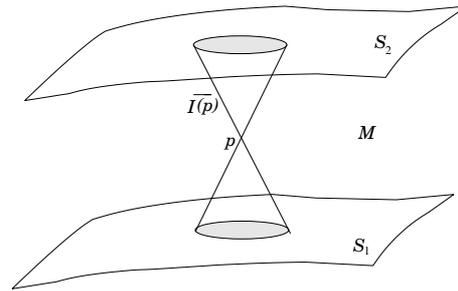


Abbildung 1.1: Kausal kompakter Bereich zwischen S_1 und S_2 . $I(p)$ ist die Menge aller lichtartigen Kurven durch p , deren Endpunkte auf S_1 und S_2 liegen. Ist für alle Punkte $p \in \mathcal{M}$ der Abschluss der Menge $I(p)$ kompakt, so ist die Raumzeit kausal kompakt.

Durch die Einschränkung auf geschlossenen Hyperflächen und kompakte interpolierende Raumzeiten verlieren wir an Allgemeinheit, wodurch wichtige Modelle der Kosmologie nicht mehr beschrieben werden können. Schränken wir den Bereich einer Topologieänderung einer nicht-kompakten Raumzeit auf ein kompaktes Gebiet ein, so können wir mit Hilfe der Kobordismen-Theorie Raumzeiten untersuchen, die diese Einschränkung zulassen. Interpolierende Raumzeiten dieser Art nennt man *extern einfach* [6].

1.2.1 Kobordismen

Bei Kobordismen handelt es sich um interpolierende Raumzeiten, die die Eigenschaft der kausalen Kompaktheit erfüllen. Kobordismen sind mathematisch sehr gut untersucht und eignen sich besonders für unsere weiteren Betrachtungen.

Definition 1.2.3. Interpoliert eine kompakte n -dimensionale Mannigfaltigkeit \mathcal{M} zwischen zwei geschlossenen $(n - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten S_1 und S_2 , dann heißt \mathcal{M} *Kobordismus* und S_1 und S_2 sind *kobordant*.

Nach der Kobordismus-Theorie müssen S_1 , S_2 und \mathcal{M} bestimmte Eigenschaften erfüllen, damit es überhaupt eine interpolierende Mannigfaltigkeit gibt. In Milnors “Characteristic classes“ [23] wird dies ausführlich diskutiert. Dabei müssen S_1 und S_2 , um kobordant zu sein, die selbe Stiefel-Whitney-Zahl haben. S_1 , S_2 und \mathcal{M} sind orientiert, falls ihre Pontryagin-Zahlen übereinstimmen. Bei der Stiefel-Whitney-Zahl und Pontryagin-Zahl handelt es sich um besondere Arten von charakteristischen Klassen zur Beschreibung der topologischen Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten. Diese sind invariant unter Homöomorphismen.

Für weitere Betrachtungen wird das Ergebnis der Kobordismen-Theorie kurz angegeben: Für die Dimensionen $n = 2, 3, 4, 7$ oder 8 sind zwei beliebige $(n - 1)$ -dimensionale, orientierte, geschlossene Mannigfaltigkeiten kobordant durch einen n -dimensionalen orientierten Kobordismus [23].

Unter welchen Bedingungen besitzt der Kobordismus \mathcal{M} eine Lorentz-Metrik? Wie wir bereits erwähnt haben, ist die Existenz einer zeitorientierten Lorentz-Metrik g_{ab} gleichbedeutend mit der eines glatten nichtverschwindenden Vektorfeldes V^a , das auf ganz \mathcal{M} existiert. Ein Vektorfeld V^a , das gleichzeitig überall auf $\partial\mathcal{M}$ auswärts oder einwärts gerichtet ist, existiert nur, falls die Eulercharakteristik χ von \mathcal{M} verschwindet, $\chi(\mathcal{M}) = 0$ (vgl. [24]). Bei der Euler-

charakteristik handelt es sich ebenfalls um eine charakteristische Klasse, die invariant unter Homöomorphismen ist.

Wir sind hingegen mehr an Vektorfeldern V^a interessiert, die einen Zeitverlauf widerspiegeln, also solche, die bei S_1 in die Mannigfaltigkeit \mathcal{M} hineinzeigen und bei S_2 hinaus. Die Bedingungen für die Existenz solch eines Vektorfeldes werden in folgendem Theorem angegeben.

Theorem 1.2.1. Sei \mathcal{M} ein n -dimensionaler topologischer Kobordismus \mathcal{M} zwischen den raumartigen Hyperflächen S_1 und S_2 und sei \mathcal{M} zusammenhängend, mit Rand $\partial\mathcal{M} = S_1 \amalg S_2$. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines auf \mathcal{M} basierenden Lorentz-Kobordismus ist

- (i) $\chi(\mathcal{M}) = 0$, falls n gerade,
- (ii) $\chi(S_1) = \chi(S_2)$, falls n ungerade [7].

Das führt bei ungeradem n zu einer Einschränkung der Topologie von kobordanten Anfangs- und Endflächen. Beispielsweise gibt es aufgrund dieser Einschränkung im dreidimensionalen Fall nur die Identität $\mathcal{M} : S_1 \rightarrow S_2$, wobei S_1 und S_2 gleiche Topologie haben, als Kobordismus.

Außerdem folgt aus Theorem 1.2.1: Falls S_1 und S_2 kobordant sind, dann existiert im Fall n gerade und $n > 2$ immer ein zeitgerichtetes nichtverschwindendes Vektorfeld V^a und somit eine interpolierende Raumzeit [6].

Hierfür wollen wir eine kurze Erklärung liefern. Da S_1 und S_2 kobordant sind, existiert ein Kobordismus \mathcal{M} der Dimension n . Besitzt dieser die Eulercharakteristik $\chi(\mathcal{M}) = 0$, so existiert ein zeitartiges Vektorfeld V^a der Form, dass eine Lorentz-Metrik g_{ab} auf dem Kobordismus eingeführt werden kann. Ist hingegen die Eulercharakteristik ungleich null, so kann \mathcal{M} mithilfe der Konstruktion der zusammenhängenden Summe modifiziert werden, bis ihre Eulercharakteristik verschwindet. Die Formel $\chi(\mathcal{N}) = \chi(\mathcal{M}) + \chi(\mathcal{V}) - 2$ beschreibt die Änderung der Eulercharakteristik der durch die zusammenhängende Summe neu erzeugten Mannigfaltigkeit $\mathcal{N} = \mathcal{M} \# \mathcal{V}$. Dadurch kann die Eulercharakteristik jeder Mannigfaltigkeit \mathcal{M} auf null reduziert werden. (vgl. [6] und [4]).

Im Gegensatz zum Fall ungerader Dimension ist hier also die interpolierende Raumzeit (\mathcal{M}, g_{ab}) eingeschränkt, wohingegen die Hyperflächen S_1 und S_2 , abgesehen von der Einschränkung, dass sie kobordant sein müssen, beliebige Topologie besitzen können.

1.2.2 Beschreibung einer zeitlichen Entwicklung

Anhand der interpolierenden Raumzeiten entwickeln wir ein Modell, mit dem wir die zeitliche Entwicklung von Hyperflächen einer Raumzeit beschreiben können. Damit kann der Begriff der Topologieänderung von Raumzeiten exakt formuliert werden.

Wir benötigen den Begriff der Blätterung. Eine *k-dimensionale Blätterung* einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist eine Zerlegung $\mathcal{K} = \{K_\Theta\}$ von \mathcal{M} in disjunkte wegzusammenhängende Mengen, die lokal um jeden Punkt so aussieht wie eine Schichtung paralleler k -dimensionaler Untermannigfaltigkeiten. Die Elemente K_Θ heißen die Blätter von \mathcal{K} . Die Blätter sind nicht notwendigerweise abgeschlossen oder kompakt.

Definition 1.2.4. Eine Partition $\mathcal{K} = \{K_\Theta\}$ von \mathcal{M} in disjunkte wegzusammenhängende Mengen heißt *Blätterung* von \mathcal{M} , wenn ein Atlas $\mathcal{A} = \{(U_\eta, h_\eta)\}$ existiert (d.h. $\{U_\eta\}$ ist eine offene Überdeckung und die $h_\eta : U_\eta \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind Diffeomorphismen), sodass das Bild jeder nichtleeren Zusammenhangskomponente von $K_\Theta \cap U_\eta$ unter h_η in eine k -Ebene $\mathbb{R}^k \times \{(x_{k+1}, \dots, x_n)\} \subset \mathbb{R}^n$ abgebildet wird.

Ausgestattet mit diesen Definitionen wollen wir jetzt den Prozess der zeitlichen Entwicklung einer Hyperfläche verdeutlichen. Wir entwickeln folgendes Modell: Eine räumliche Hyperebene S_1 , die eine Anfangsfläche beschreibt, geht in eine räumliche Hyperebene S_2 , die Endfläche, über. S_1 und S_2 werden durch eine zusammenhängende interpolierende Mannigfaltigkeit \mathcal{M} mit Lorentz-Metrik g_{ab} verbunden, wobei S_1 und S_2 raumartig bezüglich dieser Metrik sind. Diese Raumzeit wird mit $(n-1)$ -dimensionaler Blätterung in disjunkte wegzusammenhängende $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten geschichtet, d.h. lokal wird die Mannigfaltigkeit durch einen Diffeomorphismus h nach $\mathbb{R}^{(n-1)} \times \{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ abgebildet. Außerdem sollen folgenden Eigenschaften gelten:

- (i) Die Blätter sind raumartig bezüglich eines glatten nichtverschwindenden zeitartigen Vektorfeldes $V^a \in \mathcal{C}^\infty$, das aufgrund der zeitorientierten Lorentz-Metrik g_{ab} existiert.
- (ii) Im Fall von kausal kompakten Raumzeiten sind die Blätter nicht notwendigerweise abgeschlossen oder kompakt, bei Kobordismen sind die Blätter kompakte Hyperflächen.
- (iii) S_1 heißt Anfangsfläche der interpolierenden Raumzeit (\mathcal{M}, g_{ab}) , falls kein Punkt $p \in \mathcal{M}$ in der Vergangenheit eines Punktes von S_1 liegt, d.h. $p \notin I^-(S_1) \forall p \in \mathcal{M}$. S_2 heißt entsprechend Endfläche von (\mathcal{M}, g_{ab}) , falls kein Punkt $p \in \mathcal{M}$ in der Zukunft eines Punktes von S_2 liegt, d.h. $p \notin I^+(S_2) \forall p \in \mathcal{M}$.

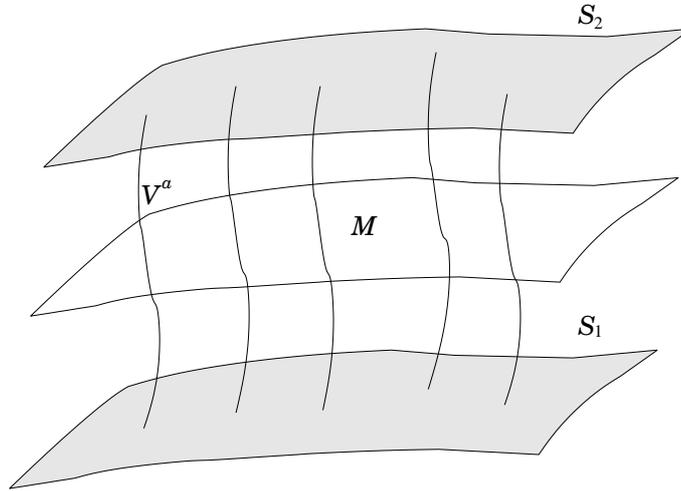


Abbildung 1.2: Interpolierende Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , deren disjunkter Rand aus den beiden nichtkompakten raumartigen Hyperflächen besteht, wobei S_1 die Anfangsfläche und S_2 die Endfläche beschreibt.

An Abbildung 1.2 wollen wir das eben beschriebene Modell verdeutlichen. Dabei soll die bezüglich einer Lorentz-Metrik raumartige Fläche S_1 sich zeitlich entwickeln und in die raumartige Fläche S_2 übergehen. Anhand des Vektorfeldes V^a kann man in natürlicher Weise eine

Zeitkoordinate t definieren, die die Vorstellung einer zeitlichen Entwicklung einer Hyperfläche ermöglicht. Wir wollen ausschließlich den Bereich zwischen den beiden Hyperflächen betrachten, schränken damit die Untersuchung einer Raumzeit beliebiger Form auf Modelle vom Typ in Abbildung 1.2 ein.

Unter dem Begriff der *Topologieänderung* einer Mannigfaltigkeit soll folgendes verstanden werden:

Eine Raumzeit ändert ihre Topologie, falls ihre Anfangsfläche S_1 und ihre Endfläche S_2 im obigen Sinne nicht *homöomorph* zueinander sind.

1.3 Eigenschaften der interpolierenden Raumzeiten

Nach dem nun die Existenz der interpolierenden Raumzeiten geklärt ist, wollen wir im nächsten Schritt die Eigenschaften dieser Mannigfaltigkeiten untersuchen.

1.3.1 Theorem von Geroch

Hier wollen wir nun die wichtigsten Theoreme, die von Geroch [4] für kompakte Raumzeiten in vier Dimensionen bewiesen und von A. Borde [6] für kausal kompakte Raumzeiten auf n Dimensionen erweitert wurden, angeben. Diese ermöglichen ein besseres Verständnis der Eigenschaften oben eingeführter Raumzeiten.

Theorem 1.3.1. Sei \mathcal{M} eine zeitorientierte kausal kompakte Raumzeit, die zwischen einer Anfangsfläche S_1 und einer Endfläche S_2 interpoliert. \mathcal{M} enthält dabei keine geschlossenen zeitartigen Kurven. Dann ist S_1 diffeomorph zu S_2 und \mathcal{M} diffeomorph zu $S_1 \times [0, 1]$, (vgl. [6]).

Anmerkungen zum Beweis von Theorem 1.3.1: Der Beweis beruht darauf, dass ein zeitartiges Vektorfeld seine Vergangenheitsendpunkte auf S_1 und die Zukunftsendpunkte auf S_2 annehmen muss, ansonsten gibt es, wegen der Kompaktheit von \mathcal{M} notgedrungen geschlossene kausale Integralkurven des Vektorfeldes V^a . Da sich Integralkurven nicht schneiden, gibt es aufgrund dieses Vektorfeldes einen Diffeomorphismus zwischen S_1 und S_2 . Den ausführlichen Beweis findet man in [6].

Folgendes Korollar zu Theorem 1.3.1 beschreibt die Eigenschaften von Raumzeiten, die sich mit einer $(n - 1)$ -dimensionalen Blätterung zerlegen lassen.

Korollar 1.3.1. Sei (\mathcal{M}, g_{ab}) eine (zeitorientierte) kausal kompakte Raumzeit, die zwischen einer Anfangsfläche S_1 und einer Endfläche S_2 interpoliert. \mathcal{M} soll sich dabei in raumartige Flächen blättern lassen, wobei S_1 die erste und S_2 die letzte Fläche der Blätterung ist. Dann ist \mathcal{M} diffeomorph zu $S_1 \times [0, 1]$, insbesondere ist S_1 diffeomorph zu S_2 [6].

In direktem Zusammenhang mit Theorem 1.3.1 steht folgendes, welches nach ähnlichem Verfahren bewiesen wird.

Theorem 1.3.2. Sei \mathcal{M} eine kompakte zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit (ohne Rand). Dann existiert eine geschlossene zeitartige Kurve [6].

Wir wissen nun, dass interpolierende Raumzeiten unter bestimmten Bedingungen existieren, auch solche, die zwischen Hyperflächen mit unterschiedlicher Topologie interpolieren. Das Theorem 1.3.1 zeigt aber, dass es geschlossene zeitartige Kurven gibt, wenn sich die Topologie dieser Raumzeit (M, g_{ab}) verändert. Geschlossene kausale Kurven widersprechen aber der Annahme der Kausalität.

Definition 1.3.1. Sei \mathcal{M} eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Die Mannigfaltigkeit \mathcal{M} erfüllt die *Kausalitätsbedingung*, falls es keine geschlossenen kausalen Kurven gibt.

1.3.2 Kausalität vs. Äquivalenzprinzip

Die Frage, die nun in diesem Abschnitt behandelt werden soll, ist die, ob Topologieänderungen prinzipiell auszuschließen sind, falls man Kausalität wünscht. Die sogenannte Morse-Theorie ermöglicht es, eine Morse-Metrik einzuführen, eine entartete Lorentz-Metrik, die an isolierten Punkten verschwindet. Damit kann eine Topologieänderung auch ohne geschlossene zeitartige Kurven stattfinden. An den singulären Punkten der Metrik allerdings ist das Äquivalenzprinzip aufzugeben. Dies werden wir noch ausführlicher diskutieren.

Wollen wir Topologieänderungen auf Mannigfaltigkeiten, die eine nichtentartete Lorentz-Metrik besitzen, zulassen, müssen wir die Forderung der Kausalität aufgeben. Man könnte nun versucht sein, das Phänomen der Topologieänderung als gänzlich unphysikalisch auszuschließen. Wir wollen aber an dieser Stelle keine voreiligen Schlüsse ziehen und suchen nach alternativen Methoden. Wollen wir das Prinzip der Kausalität *nicht* aufgeben, so bleibt als Ausweg nur das Abändern der Lorentz-Metrik. Dafür gibt es mehrere Methoden, wie zum Beispiel die “Euklidisierung“ der Metrik, wobei man die kausale Ordnung und die Eigenschaft der Metrik, lorentzsch zu sein, aufgibt, sowie die Einführung nichtdifferenzierbarer oder sogar unstetiger Metriken [25, 26]. Diesen Methoden wollen wir allerdings keine weitere Aufmerksamkeit schenken, sondern wollen eine, die vor allem in der “Sum-Over-Historie“-Methode (SOH) der Quantengravitation [11, 25, 26, 27] Anwendung findet, angeben.

Wir ändern die Lorentz-Metrik g_{ab} so ab, dass sie an isolierten singulären Punkten entartet sein kann. Wir verzichten folglich darauf, dass sich die Lorentz-Raumzeit (\mathcal{M}, g_{ab}) an jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ lokal als Minkowskiraum schreiben läßt. Somit kann sich die Topologie einer Raumzeit ändern, ohne dabei die Kausalität zu verletzen. An diesen isolierten Punkten geben wir allerdings das Äquivalenzprinzip auf.

Das Äquivalenzprinzip besagt, dass alle Körper in einem Gravitationsfeld gleich schnell fallen. Das bedeutet, dass es unmöglich ist, durch lokale Experimente zwischen einem in einem Gravitationsfeld frei fallenden, nichtrotierenden System, welches ein lokales Inertialsystem darstellt, und einem gleichförmig bewegten System im gravitationsfreien Raum zu entscheiden. In diesem lokalen Inertialsystem soll die spezielle Relativitätstheorie gelten. Mathematisch ausgedrückt heißt das, dass die Lorentz-Raumzeit lokal *minkowskisch* ist, d.h., in der Umgebung eines Punktes $\hat{x} \in \mathcal{M}$ gibt es ein Koordinatensystem $\{x^\mu\}$ derart, dass $g_{\mu\nu}(\hat{x}) = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, und $\Gamma_{\nu\rho}^\mu(\hat{x}) = 0$, wobei Γ die Christoffel-Symbole sind. Ein solches Koordinatensystem nennt man ein lokales Inertialsystem oder lokales Lorentz-System. Es gelten bei \hat{x} die Bewegungs- bzw. Feldgleichungen der speziellen Relativitätstheorie. Ist

nun die Lorentz-Metrik an isolierten Punkten entartet, so ist sie an diesen Punkten nicht minkowskisch und deshalb ist das Äquivalenzprinzip verletzt.

Will man Topologieänderungen zulassen, so muss man sich entscheiden, ob man das Äquivalenzprinzip beibehalten möchte, indem man eine global definierte nichtentartete Lorentz-Metrik einführt, dafür aber eine Kausalitätsverletzung in Kauf nimmt, oder an singulären Punkten der Raumzeit das Äquivalenzprinzip zugunsten einer Raumzeit mit kausaler Struktur aufgibt. Im Anschluss wollen wir eine Methode verwenden, bei der wir erlauben, dass die Lorentz-Metrik an isolierten singulären Punkten verschwindet. Durch die Definition dieser sogenannten *Morse-Metrik*, können wir das Problem der Kausalitätsverletzung umgehen.

1.4 Morse-Raumzeiten

Wir haben die Möglichkeit, das Problem der Kausalitätsverletzung zu umgehen, indem wir der Lorentz-Metrik erlauben, an isolierten Punkten null zu werden. Eine Metrik, die diese Eigenschaften erfüllt, kann mit Hilfe einer Morse-Funktion f , deren Eigenschaften wir im Anschluss ausführlich diskutieren wollen, konstruiert werden. Wie wir sehen werden, liefert uns die Morse-Theorie auch die Möglichkeit, Kobordismen beliebiger Topologie und Dimension in elementare Kobordismen zu zerlegen. Dadurch kann das Studium der Vielzahl der Kobordismen auf wenige elementare reduzieren werden.

1.4.1 Morse-Funktion

Sei \mathcal{M} eine n -dimensionale, kompakte glatte zusammenhängende Mannigfaltigkeit, sodass $\partial\mathcal{M}$ aus zwei disjunkten $(n-1)$ -dimensionalen Komponenten, S_0 und S_1 , besteht, die abgeschlossen sind und jeweils einem initialen und einem finalen Rand der Raumzeit entsprechen. Jedes solche \mathcal{M} gestattet nun die Einführung einer sogenannten *Morse-Funktion* $f: \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$, mit $f|_{S_0} = 0$ und $f|_{S_1} = 1$. f besitzt eine Menge von *kritischen Punkten* $\{p_k\}$ mit $(\partial_a f(p_k) = 0)$, die nichtentartet sind, d.h. die Hesse-Matrix $\partial_a \partial_b f(p_k)$ ist an diesen Punkten invertierbar [11]. Folglich sind die kritischen Punkte von f isoliert und, da \mathcal{M} kompakt ist, gibt es auch nur endlich viele davon.

In n Dimensionen gibt es $(n+1)$ verschiedene Variationen von Morse-Punkten, jede Variation gehört zu einem der $(n+1)$ möglichen Vorzeichen der nichtentarteten quadratischen Form $\partial_a \partial_b f$ beim Extrempunkt p_k von f .

Unter Verwendung einer Morse-Funktion f und einer riemannschen Metrik h_{ab} , die auf \mathcal{M} wegen deren Parakompaktheit immer existiert, konstruieren wir eine Metrik auf \mathcal{M} , die fast überall lorentzsch ist, mit einer endlichen Anzahl isolierter Punkte, an denen die Metrik entartet ist. Die so definierte Metrik

$$g_{ab} = h_{ab}(h^{cd} \partial_c f \partial_d f) - \zeta \partial_a f \partial_b f, \text{ mit } \zeta > 1, \quad (1.1)$$

bezeichnen wir als *Morse-Metrik*. Aus der Definition der Metrik (1.1) sieht man, dass g_{ab} genau bei den kritischen Punkten p_k verschwindet. Diese Punkte heißen Morse-Singularitäten.

Man definiert eine Zeitfunktion auf dem Kobordismus, sodass Hyperflächen mit konstantem f sich stetig von der Anfangsfläche zur Endfläche entwickeln werden. Das entspricht dem Bild

der zeitlichen Entwicklung, das wir im Kapitel 1.2.2 eingeführt haben. Dabei beschreiben die Hyperflächen mit konstantem f die Blätter der $(n-1)$ -dimensionalen Blätterung aus Definition 1.2.4. Die Stetigkeit der zeitlichen Entwicklung wird an den Morse-Punkten $p_k \in (\mathcal{M}, g_{ab})$ unterbrochen. Die Morse-Metrik aus Definition 1.1 verschwindet an den kritischen Punkten. Korollar 1.3.1 ist deshalb nicht gültig und somit kann sich die Topologie der Blätter an diesen Punkten ändern, d.h. die Blätter, die sich, zeitlich gesehen, vor und nach dem Morse-Punkt befinden, sind nicht homöomorph zueinander. Im Gegensatz dazu sind die Blätter, zwischen denen sich kein Morse-Punkt befindet, diffeomorph zueinander.

An den Punkten, an denen die Metrik nicht verschwindet, existiert ein wohldefinierter Vergangenheits- und Zukunftslichtkegel. Die lokale Trennung in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft unterscheidet sich an den Morse-Punkten von der an den "normalen" Punkten der Raumzeit. Ein Indiz dafür, wie diese Bereiche bei den Morse-Punkten aussehen, liefert deren Morse-Index λ_k . Das wollen wir in einem der folgenden Kapitel noch genauer ausführen.

Im Folgenden wollen wir wichtige Eigenschaften der Morse-Funktion angeben.

Lemma 1.4.1. (Morse-Lemma) Falls $p \in \mathcal{M}$ ein kritischer Punkt einer Morse-Funktion $f : \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$ ist, dann existieren lokale Koordinaten x_1, x_2, \dots, x_n in einer Umgebung von p bezüglich derer f sich in der Umgebung schreiben läßt als $f(x_1, \dots, x_n) = c - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$ mit $0 \leq \lambda \leq n$ und $c = \text{konst}$ [28].

Die Anzahl der negativen Vorzeichen λ wird als *Morse-Index* von f bei p bezeichnet. Es handelt sich dabei um die Anzahl der negativen Eigenwerte der Hesse-Matrix $\partial_a \partial_b f(p)$. Wird f als Höhenfunktion aufgefasst, so bezeichnet λ die Anzahl der Koordinatenrichtungen, in denen der Wert der Funktion f am verallgemeinerten Sattelpunkt p kleiner wird. Anschaulich wird das klar, wenn man Abbildung 1.3 betrachtet. Die Yarmulke hat Index $\lambda = 2$, der Wert der Funktion f ist genau bei p maximal und nimmt in jede Richtung ab. Die Hosentopologie hingegen besitzt einen Sattelpunkt bei p , beschrieben durch den Index $\lambda = 1$. $\lambda = 0$ bezeichnet das Minimum der zeitinversen Yarmulke.

Die *Morse-Zahl* von \mathcal{M} ist das Minimum der Anzahl der kritischen Punkte über alle Morse-Funktionen $f : \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$. Beispielsweise läßt die $1 + 1$ -dimensionale Zylindertopologie Morse-Funktionen mit gerader Anzahl kritischer Punkte zu, die Morse-Zahl ist hingegen 0. Wir bezeichnen nun einen topologischen Kobordismus mit Morse-Zahl 0 als *trivialen* und mit Morse-Zahl 1, also Kobordismen mit einem einzigen Morse-Punkt, als *elementaren* Kobordismus.

Bemerkung 1.4.1. Für eine n -dimensionale Raumzeit gibt es $n+1$ mögliche Werte des Index $(0, 1, \dots, n)$. Es gibt also $n+1$ verschiedene elementare Kobordismen (elementare Kobordismen mit Index λ oder $n - \lambda$ unterscheiden sich nur in der Zeitrichtung und können als derselbe angesehen werden.)

Bemerkung 1.4.1 wollen wir am Beispiel $n = 2$ verdeutlichen. Die drei elementaren Kobordismen sind in Abbildung 1.3 dargestellt, wobei f als Höhenfunktion aufgefasst wird. Die Yarmulke, $\lambda = 2$, beschreibt die Vernichtung eines Kreises. Dabei besteht der disjunkte Rand der Yarmulke aus dem Kreis S^1 und der leeren Menge. Die Hosentopologie, mit $\lambda = 1$, beschreibt einen Vorgang, in dem zwei Kreise, $S^1 \times S^1$, die eine Randkomponente der Hose darstellen, zu einem Kreis, S^1 , der anderen Randkomponente, verschmelzen. Das Zeitinverse der Yarmulke $\lambda = 0$ beschreibt die Erzeugung eines Kreises aus der leeren Menge.

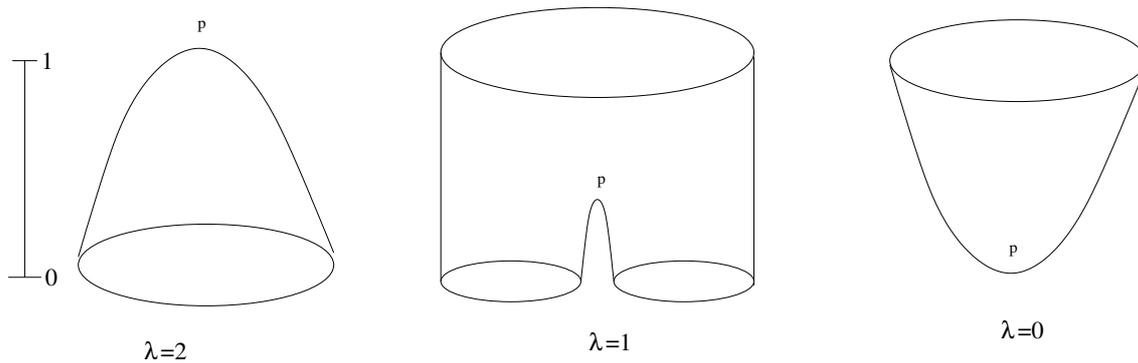


Abbildung 1.3: Die Morse-Funktion entspricht einer Höhenfunktion zwischen 0 und 1.

1.4.2 Zerlegung von Kobordismen

Die Morse-Theorie gibt uns nun die Möglichkeit, einen Kobordismus in elementare Kobordismen aufzuspalten. Ein Ergebnis dieser Theorie ist folgendes Lemma.

Lemma 1.4.2. Jeder Kobordismus läßt sich als eine Komposition von elementaren Kobordismen ausdrücken [28].

Die in Lemma 1.4.2 erwähnte Zerlegung ist allerdings nicht eindeutig. Als Beispiel wollen wir das wieder in zwei Dimensionen erläutern. Die Sphäre S^2 kann beispielsweise in zwei elementare Kobordismen, in die Yarmulke und ihr Zeitinverses, oder in vier elementare Kobordismen, eine Yarmulke, eine kopfüberstehende Hose und zwei zeitinverse Yarmulken zerlegt werden.

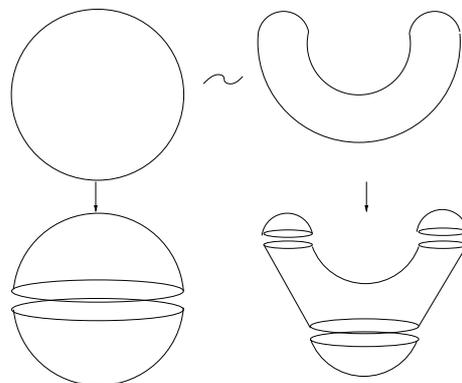


Abbildung 1.4: Verformung der S^2 und Zerlegung in elementare Kobordismen, wie die Yarmulke und die Hose, sind nicht eindeutig.

Hier wollen wir nun eine Erklärung liefern, weshalb sich ein beliebiger Kobordismus in elementare zerlegen läßt. Wichtig dafür ist das Verständnis der Methode der *Chirurgie* die hier kurz angegeben werden soll.

Definition 1.4.1. Unter einer *Chirurgie von Typ λ* an einer $(n - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit V verstehen wir folgende Operation: Entferne eine leicht ausgedehnte $(\lambda - 1)$ -Sphäre, $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$, aus V und ersetze sie durch eine leicht ausgedehnten $(n - \lambda - 1)$ -

Sphäre, $S^{n-\lambda-1} \times B^\lambda$ durch Identifikation der Ränder unter Verwendung des Diffeomorphismus, $d : S^{\lambda-1} \times S^{n-\lambda-1} \rightarrow S^{n-\lambda-1} \times S^{\lambda-1}$. D^k soll der offene k -dimensionale Ball sein, und B^k der abgeschlossene k -Ball (und $B_1 = I$).

Vereinfacht vorgestellt wird bei der Durchführung einer λ -Chirurgie eine $(\lambda - 1)$ -Sphäre zerstört und eine $(n - \lambda - 1)$ -Sphäre erzeugt. Wir wollen das an Abbildung 1.5 erklären.

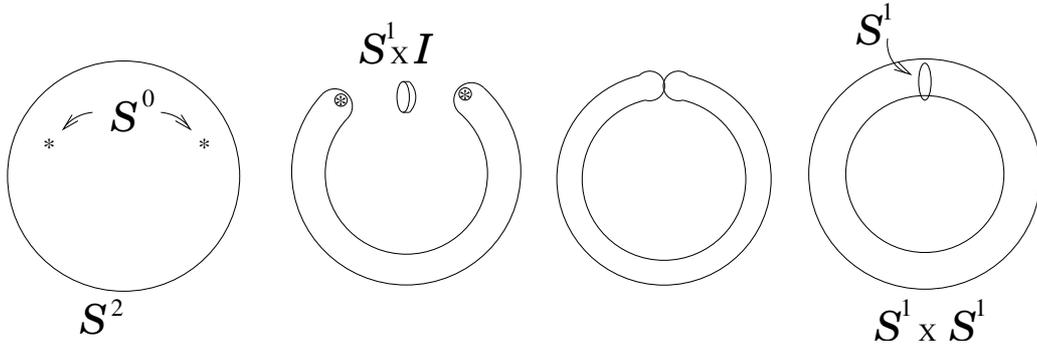


Abbildung 1.5: Durchführung einer Typ 1 Chirurgie an der S^2

Betrachten wir als Beispiel eine Chirurgie von Typ $\lambda = 1$ in drei Dimensionen, wobei wir als Ausgangsmannigfaltigkeit die S^2 wählen. Wir entfernen aus der 2-dim Sphäre S^2 die zu einer offenen zweidimensionalen Fläche ausgedehnten Sphären $S^0 \times D^2$ (S^0 besteht dabei aus den Elementen $\{-1, 1\}$). Man entfernt um die Punkte S^0 offene Kreisscheiben. Diese ersetzt man durch eine, zum Hohlzylinder der Länge I leicht ausgedehnte Sphäre S^1 , also $S^1 \times B^1 \cong S^1 \times I$. Durch den Diffeomorphismus d wird nun der Rand der Sphäre S^2 , der durch das Entfernen der beiden offenen Kreisscheiben entstanden ist, $S^0 \times S^1$, mit dem Rand des Hohlzylinders, $S^1 \times S^0$, verbunden. Die neue 2-dim Mannigfaltigkeit ist nun der 2-dim Torus $\mathcal{T} = S^1 \times S^1$. Die für unsere Diskussion zentrale Aussage der Chirurgie ist, dass der Prozess der Chirurgie als eine Mannigfaltigkeit mit Topologieänderung aufgefasst werden kann, dass es insbesondere einen Kobordismus gibt, dessen Rand, wie im gerade gezeigten Beispiel in Abbildung 1.5, $V_0 \cong S^2$ und $V_1 \cong S^1 \times S^1$ ist. Obige Ausführungen werden in Theorem 1.4.1 zusammengefasst.

Theorem 1.4.1. Kann man eine $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit V_1 durch den Prozess einer Chirurgie von Typ λ aus einer anderen $(n - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit V_0 erhalten, dann existiert ein elementarer Kobordismus \mathcal{M} , den man die *Spur der Chirurgie* nennt, der als Rand die disjunkte Vereinigung von V_0 und V_1 hat, $\partial\mathcal{M} = V_0 \amalg V_1$, und eine Morse-Funktion f auf \mathcal{M} , $f : \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$ besitzt, mit genau einem Morse-Punkt mit Index λ [28].

Die Spur der Chirurgie ist eine Mannigfaltigkeit \mathcal{M} mit disjunktem Rand, wobei dieser die Eigenschaft hat, dass ein Teil des Randes die Ausgangsmannigfaltigkeit V_0 und der andere Teil des Randes die aus der Chirurgie neu erhaltene Mannigfaltigkeit V_1 (bis auf Diffeomorphismen) ist. Wegen Theorem 1.4.1 handelt es sich dann bei \mathcal{M} um einen elementaren Kobordismus.

Ausgestattet mit dem Werkzeug der Chirurgie wollen wir schließlich einen Kobordismus zerlegen. Betrachten wir einen beliebigen n -dimensionalen Kobordismus \mathcal{M} . Wie wir oben gesehen haben, existiert auf diesem Kobordismus eine Morse-Funktion $f : \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$ die wir

im Sinne einer Höhenfunktion auffassen wollen. Wegen der Kompaktheit des Kobordismus und der Eigenschaft, dass die nichtentarteten Morse-Punkte isoliert sind, gibt es nur endlich viele. Sollten zwei Morse-Punkte auf selber Höhe liegen, so kann durch leichtes Abändern der Morse-Funktion (z.B. leichte Rotation des Koordinatensystems) Abhilfe geschaffen werden. Betrachten wir zwei $(n - 1)$ -dimensionale Blätter mit konstantem f , zwischen denen sich ein einziger Morse-Punkt p_k befindet. Falls wir eines der zwei Blätter als einen initialen, das andere als einen finalen Rand eines Teilbereiches von \mathcal{M} auffassen, so folgt nach Theorem 1.4.1, dass es sich bei diesem Teilbereich um einen elementaren Kobordismus handelt, mit einem einzigen Morse-Punkt mit Index λ_k .

1.5 Kausale Struktur von Kobordismen

Zum Abschluss der Betrachtungen von Raumzeiten mit Topologieänderungen wollen wir diskutieren, wie sich elementare Kobordismen bezüglich ihrer Kausalität verhalten. Dies wird motiviert durch Ergebnisse, die wir in Kapitel 3 angeben werden. Es zeigt sich, dass sich auf der Hosentopologie auf herkömmliche Art und Weise, wie Anderson und DeWitt [9], sowie Manogue, Copeland und Dray [10], gezeigt haben, keine QFT definieren läßt. Wir wollen den Begriff der kausalen Stetigkeit einführen und zeigen, dass die Yarmulke kausal stetig ist, die Hosentopologie hingegen nicht. Wie wir sehen werden, kann das kausale Verhalten elementarer Kobordismen zum Teil durch den Morse-Index ausgedrückt werden. Das führt unmittelbar zur Diskussion der Borde-Sorkin Vermutung. Diese wollen wir angeben und erwähnen Teile der Beweise für die Vermutung.

1.5.1 Verschiedene Kausalitätsbedingungen

Neben der in Kapitel 1.1 erwähnten Begriffe bezüglich kausalem Verhalten von Lorentz-Mannigfaltigkeiten, gibt es noch weitere, die für unsere folgenden Betrachtungen wichtig sind.

Eine Raumzeit (\mathcal{M}, g_{ab}) ist *kausal*, falls es keine geschlossenen kausalen Kurven in \mathcal{M} gibt. Eine Raumzeit (\mathcal{M}, g_{ab}) ist *stark kausal*, falls jeder Punkt in \mathcal{M} eine Umgebung besitzt, die keine kausale Kurve mehr als einmal schneidet. Eine Raumzeit (\mathcal{M}, g_{ab}) ist *stabil kausal*, falls eine Raumzeit (\mathcal{M}, g'_{ab}) existiert, sodass der Lichtkegel von g'_{ab} überall weiter ist als der von g_{ab} und gleichzeitig kausal bleibt. Stabile Kausalität ist gleichbedeutend mit der Existenz einer globalen Zeitfunktion auf \mathcal{M} [16]. Eine Raumzeit heißt *global hyperbolisch*, falls sie eine raumartige Hyperfläche besitzt, die von jeder nichterweiterbaren kausalen Kurve genau in einem Punkt geschnitten wird.

Wir wollen den Begriff der kausalen Stetigkeit bezüglich anderer Kausalitätsbegriffe einordnen. Dieser nimmt bei der Untersuchung des kausalen Verhaltens von elementaren Kobordismen eine besondere Rolle ein, und soll gleich im Anschluss ausführlich diskutiert werden. Die einzelnen Kausalitätsstrukturen sind geordnet, d.h. z.B. ist eine global hyperbolische Raumzeit gleichzeitig kausal stetig und erfüllt die starke Kausalitätsbedingung usw. Es ergibt sich folgende Abhängigkeit, wobei Folgerungen in umgekehrter Richtung nicht gelten:

Globale Hyperbolizität \Rightarrow Kausale Stetigkeit \Rightarrow Stabile Kausalität \Rightarrow Starke Kausalität \Rightarrow Kausalität.

1.5.2 Kausale Stetigkeit

Kausale Stetigkeit ist die schwächste der oben erwähnten Bedingungen, die nicht für alle Morse-Raumzeiten gilt [16]. Wir untersuchen im Folgenden, wie sich unterschiedliche Morse-Funktionen, mit entsprechenden kritischen Punkten mit Index λ , auf die Kausalitätsstruktur der entsprechenden Morse-Raumzeit auswirken, und versuchen, das Verhalten zu klassifizieren. Am Beispiel der Yarmulke und der Hose veranschaulichen wir die unterschiedlichen Auswirkungen, womit der Begriff der kausalen Stetigkeit verständlich gemacht werden kann. Die eben erwähnte Klassifizierung findet ihren Höhepunkt in der Borde-Sorkin Vermutung, sowie der Angabe von Proposition 1.5.1, einer abgeschwächten Version der Borde-Sorkin Vermutung, die in [16] bewiesen wurde.

Unter dem Begriff der kausalen Stetigkeit kann man sich, einfach ausgedrückt, folgendes vorstellen: Ein Raumzeit ist *nicht* kausal stetig, falls eine stetige Variation eines Punktes zu einer unstetigen Änderung des Volumens der kausalen Vergangenheit oder Zukunft dieses Punktes führt. Das läßt sich mathematisch präziser ausdrücken.

Definition 1.5.1. Ein Raumzeit (\mathcal{M}, g_{ab}) ist *kausal stetig* falls für jedes Paar von Punkten $x, y \in \mathcal{M}$ die Bedingung $x \in \overline{I^-(y)} \Leftrightarrow y \in \overline{I^+(x)}$ gilt. ²

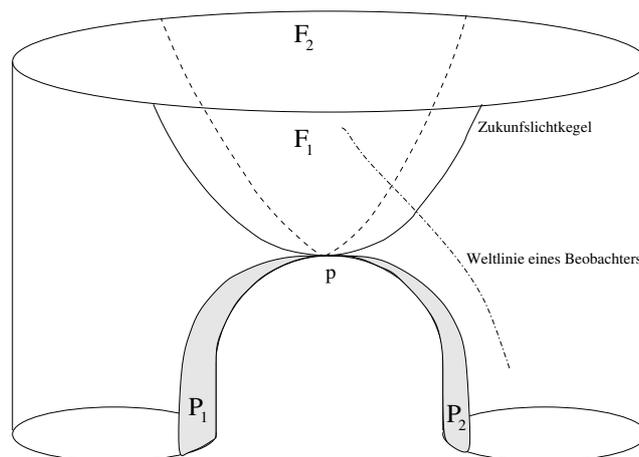


Abbildung 1.6: Die Hose weist kein kausal stetiges Verhalten auf. Der Vergangenheitsbereich P_1 des Morse-Punktes p , der sich im linken Hosenbein befindet, hat kausalen Einfluß auf den Beobachter, sobald dieser sich in den Zukunftsbereich F_1 von p begibt. Dabei ist die Volumenänderung des Vergangenheitsbereichs des Beobachters unstetig.

Wir wählen eine anschauliche Methode zur Beschreibung von kausaler Stetigkeit. Die Hosentopologie ist ein Beispiel für eine Raumzeit die *nicht* kausal stetig ist. Wir wollen versuchen, diesen Sachverhalt bildlich darzustellen. Wie bereits erwähnt, ist eine Raumzeit kausal unstetig, falls sich die kausale Vergangenheit oder die kausale Zukunft eines Punktes unstetig ändert, wobei der Punkt stetig in der Raumzeit bewegt wird. In Abbildung 1.6 betrachten wir zur Verdeutlichung die Weltlinie eines Beobachters, der sich vom rechten Hosenbein aus in die kausale Zukunft des Morse-Punktes p bewegt. Solange nun seine Weltlinie nicht diesen Bereich

²Man findet in [29] weitere äquivalente Definitionen von kausaler Stetigkeit.

schneidet, ändert sich mit einer stetigen Änderung auch das Volumen seines Vergangenheits- und Zukunftslichtkegel stetig. Trifft er hingegen auf die kausale Zukunft von p , so ändert sich der Vergangenheitsbereich unstetig, weil nun Teile der kausalen Vergangenheit des Punktes p aus dem linken Hosenbein hinzukommen und auf den Beobachter einwirken können.

1.5.3 Die Sorkin und die Borde-Sorkin Vermutungen

Zum Abschluss wollen wir noch die Vermutungen von Sorkin und Borde angeben.

Die Sorkin Vermutung

Vermutung 1.5.1. Ein Quantenfeld, das sich auf einer Morse-Raumzeit (\mathcal{M}, g_{ab}) ausbreitet, hat eine unphysikalische Singularität genau dann, wenn (\mathcal{M}, g_{ab}) kausal unstetig ist.

In diesem Zusammenhang bedeutet der Begriff “unphysikalische Singularität“ die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors (vgl. [26]). Diese Vermutung konnte bis heute nicht bewiesen werden. Es gibt wenige Rechnungen, in denen gezeigt wurde, dass kausal unstetige Raumzeiten zu undefinierten Quantenfeldtheorien führen. Für das Hosenproblem wurde für zwei Dimensionen von Anderson und DeWitt [9], und in verbesserter und erweiterter Version von Manogue, Copeland and Dray [10] gezeigt, dass der Energie-Impuls-Tensor divergiert. Ebenfalls in zwei Dimensionen wurde für die Yarmulke-Raumzeit, einer kausal stetigen Raumzeiten, gezeigt, dass darauf wohldefinierte Quantenfelder existieren. Ausführlicher wollen wir dieses Thema in Kapitel 3 behandeln.

Die Borde-Sorkin Vermutung

Vermutung 1.5.2. Sei \mathcal{M} ein kompakter Kobordismus und $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion mit kritischen Punkten $\{p_k\}$, dann ist eine Morse-Raumzeit (\mathcal{M}, g_{ab}) , die durch f definiert wird, genau dann kausal stetig, falls *keiner* der Punkte $\{p_k\}$ Morse-Index 1 oder $n - 1$ hat.

Dowker, Garcia und Surya haben in [16] folgende Proposition 1.5.1 bewiesen, einer abgeschwächten Version der Borde-Sorkin-Vermutung.

Proposition 1.5.1. Sei \mathcal{M} ein kompakter Kobordismus und $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion, dann gilt:

- (i) falls f *keinen* kritischen Punkt $\{p_k\}$ mit Morse-Index 1 oder $n - 1$ hat, dann existieren Morse-Raumzeiten (\mathcal{M}, g_{ab}) , bezüglich \mathcal{M} , welche kausal stetig sind;
- (ii) falls f kritische Punkte $\{p_k\}$ mit Morse-Index 1 oder $n - 1$ besitzt, dann ist jede Morse-Raumzeit (\mathcal{M}, g_{ab}) , die durch f definiert wurde, kausal unstetig [16].

Die Borde-Sorkin Vermutung konnte somit zum Großteil bewiesen werden. Es bleibt aber noch zu zeigen, dass jede Morse-Metrik auf einem elementaren Kobordismus, dessen Morse-Punkt Index $\lambda \neq 1, n - 1$ hat, kausal stetig ist. Bewiesen wurde dies bisher nur für elementare Kobordismen, deren Morse-Punkte Index $\lambda = 0, n$ sind [17].

Wir wollen die Ergebnisse dieses Kapitels kurz zusammenfassen. Wir können einen Kobordismus, dessen Topologie sich beliebig ändern kann, in elementare Kobordismen zerlegen.

Diese haben jeweils nur einen Morse-Punkt und die Untersuchung der kausalen Stetigkeit beschränkt sich auf diesen Punkt. Deshalb wollen wir im Folgenden versuchen, auf elementaren Kobordismen eine Quantenfeldtheorie zu definieren. Bereits in zwei Dimensionen treffen wir bei der Definition einer Quantenfeldtheorie auf der Hosentopologie auf Probleme (vgl. [10]). Wir beschränken uns deshalb beim Versuch der Definition einer Quantenfeldtheorie mithilfe einer alternativen Annäherung zunächst ebenfalls auf den zweidimensionalen Fall.

Kapitel 2

Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit

In der herkömmlichen Formulierung der Quantentheorie werden zuerst Zustände als Vektoren in einem Hilbertraum definiert und anschließend die Observablen als Operatoren, die auf diese Vektoren wirken. Dabei ist die Wahl des Hilbertraums, der zur Konstruktion der Quantentheorie verwendet wird, nicht eindeutig. Es gibt zwar Favoriten, z.B. ist die Wahl des Fockraums, mit einem Vakuumvektor, der invariant unter der Poincare-Transformation ist, zur Beschreibung des Teilchenbegriffs wesentlich, es können aber genauso andere Hilberträume zur Konstruktion einer Quantentheorie verwendet werden. Betrachtet man dabei die Struktur der Observablen, so stellt man fest, dass diese unabhängig von der Wahl des ursprünglichen Hilbertraums ist.

Nach dem Stone-von-Neumann-Theorem sind Quantentheorien mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden durch die Kommutatorrelationen bis auf unitäre Äquivalenz festgelegt, da dabei die Darstellungen auf unterschiedlichen Hilberträumen unitär äquivalent sind und folglich äquivalente Theorien beschreiben. Quantenfeldtheorien sind Theorien mit unendlich vielen Freiheitsgraden, weshalb das Stone-von-Neumann-Theorem nicht mehr gilt. Verschiedene Darstellungen der Kommutatorrelationen auf unterschiedlichen Hilberträumen sind nicht notwendigerweise unitär äquivalent, was zu unterschiedlichen Theorien führen kann. Da es auf gekrümmter Raumzeit keine ausgezeichnete Symmetriegruppe gibt, und somit keinen ausgezeichneten Vakuumzustand, bezüglich dem ein bevorzugter Hilbertraum ausgewählt werden kann, verwenden wir den algebraischen Zugang.

Dieser scheint zur Definition einer Quantenfeldtheorie auf Raumzeiten mit Topologieänderungen, ebenfalls der adäquate zu sein. Bei diesem allgemeineren Zugang werden mit der Wahl eines Hilbertraumes \mathcal{H} , der zur Definition der Theorie benötigt wird, keine Zustände ausgeschlossen, die zur einer Darstellung der Kommutatorrelationen auf einen anderen Hilbertraum \mathcal{H}' gehören, dessen Darstellung nicht unitär äquivalent zur Darstellung auf dem zur Konstruktion ursprünglich gewählten Hilbertraumes \mathcal{H} ist. Darauf werden wir später noch ausführlicher eingehen.

2.1 Algebraischer Zugang zur Quantenfeldtheorie

Zur Beschreibung eines physikalischen Systems verwenden wir Zustände und Observablen. Wir wollen, entsprechend der algebraischen Formulierung der Quantentheorie, erst die Algebren betrachten und in einem zweiten Schritt die Zustände als Erwartungswertfunktionale auf der Algebra der Observablen definieren. Schließlich soll die GNS-Konstruktion den engen Zusammenhang zwischen der algebraischen Methode und der Hilbertraum-Formulierung verdeutlichen.

2.1.1 Die Algebra der Observablen

Zentraler Begriff bei der algebraischen Formulierung ist die Algebra der Observablen. Diese besitzt in der Quantentheorie die Struktur einer assoziativen involutiven Algebra mit Einselement.

Definition 2.1.1. Ein komplexer Vektorraum \mathcal{A} heißt *Algebra*, wenn auf \mathcal{A} eine bilineare Abbildung $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (A, B) \mapsto AB \in \mathcal{A}$, die *Multiplikation*, ausgezeichnet ist. \mathcal{A} heißt *assoziative Algebra*, wenn das Produkt assoziativ ist: $(AB)C = A(BC) =: ABC$ für alle $A, B, C \in \mathcal{A}$.

Definition 2.1.2. Eine assoziative Algebra heißt **-Algebra*, wenn eine antilineare (involutive) Abbildung $\mathcal{A} \ni A \mapsto A^* \in \mathcal{A}$ mit den Eigenschaften

- (i) $A^{**} = A$ für alle $A \in \mathcal{A}$
- (ii) $(AB)^* = B^*A^*$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$
- (iii) $(A + \lambda B)^* = A^* + \bar{\lambda}B^*$ (beschreibt die Antilinearität)

ausgezeichnet ist. Eine Abbildung mit diesen Eigenschaften heißt *Involution*.

Wir wollen an dieser Stelle ein Beispiel für eine *-Algebra angeben. Gehen wir von der Hilbertraum-Formulierung der Quantenmechanik aus, so ist die Algebra der Observablen die Menge der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum \mathcal{H} . Wir bezeichnen diese Algebra mit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Die Involution wird mithilfe des Skalarprodukts des Hilbertraums definiert. A^* heißt adjungierter Operator und erfüllt die Beziehung $(\Phi, A\Psi) = (A^*\Phi, \Psi)$, $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}$. Dabei heißt ein Operator A beschränkt, falls seine Operatornorm

$$\|A\| = \sup_{\Phi \in \mathcal{H}, \|\Phi\|=1} \|A\Phi\| < \infty \quad (2.1)$$

endlich ist. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ bildet mit dieser Norm eine Banach *-Algebra.

Allgemein heißt eine assoziative Algebra *normierte Algebra*, wenn auf \mathcal{A} eine Norm $\|\cdot\|$ mit der Eigenschaft $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ ausgezeichnet ist. Ist \mathcal{A} eine *-Algebra und gilt zusätzlich $\|A\| = \|A^*\|$ für alle $A \in \mathcal{A}$, dann heißt \mathcal{A} *normierte *-Algebra*. \mathcal{A} heißt *Banach*-Algebra* falls \mathcal{A} vollständig in dieser Norm ist.

Definition 2.1.3. Ist die zusätzliche Bedingung $\|AA^*\| = \|A\|^2$ für alle $A \in \mathcal{A}$ erfüllt, so bezeichnet man eine Banach*-Algebra als *C*-Algebra*

Die Menge der beschränkten Operatoren $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ auf einem Hilbertraum ist bezüglich der Operatornorm 2.1 vollständig. Es handelt sich also um eine C^* -Algebra.

Für abstrakte Untersuchungen eignen sich die C^* -Algebren besonders gut, denn jede normabgeschlossene C^* -Algebra ist isomorph zu einer normabgeschlossenen Algebra beschränkter Hilbertraum-Operatoren.

Wir werden in den folgenden Kapiteln noch den Begriff des $*$ -Ideals benötigen. Dabei handelt es sich um eine Unteralgebra, die invariant unter Rechts- bzw. Linksmultiplikation mit allen Elementen aus der Algebra ist.

Definition 2.1.4. Eine $*$ -Unteralgebra \mathcal{B} von \mathcal{A} bezeichnet man als (beidseitiges) $*$ -Ideal, wenn $AB \in \mathcal{B}, BA \in \mathcal{B} \forall A \in \mathcal{A}$ und $\forall B \in \mathcal{B}$.

2.1.2 Zustände

Betrachten wir zur Illustration die selbstadjungierten Operatoren $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ auf einem endlichdimensionalen Hilbertraum (\mathcal{H}) . Die Zustände können durch Dichtematrizen $\rho \in \mathcal{B}^*(\mathcal{H})$ beschrieben werden, wobei $\mathcal{B}^*(\mathcal{H})$ der Dualraum zu $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist. Die Dichtematrizen ρ stellen also Linearformen auf dem Raum der beschränkten Operatoren $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dar. Dabei wird über die Beziehung $\rho(A) := \text{tr}(\rho A)$ eine solche Linearform definiert. In der algebraischen Formulierung wollen wir Zustände ähnlich behandeln. Wir definieren hier die Zustände als Erwartungswertfunktionale.

Definition 2.1.5. Die Zustände von \mathcal{A} sind diejenigen \mathbb{C} -linearen Funktionale $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, die normiert und positiv sind, d.h. für die

- (i) $\omega(\mathbb{1}) = 1$ und
- (ii) $A \geq 0 \Rightarrow \omega(A) \geq 0$

gilt.

$A \in \mathcal{A}$ heißt positiv, $A \geq 0$, falls ein $B \in \mathcal{A}$ existiert mit $A = B^*B$. Für alle positiven \mathbb{C} -linearen Funktionale ω gilt die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung $|\omega(A^*B)|^2 \leq \omega(A^*A)\omega(B^*B)$.

Jedes Funktional definiert zu einem selbstadjungierten Element einer C^* -Algebra ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß. Als einfaches Beispiel betrachten wir wieder die C^* -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Durch die Wahl eines Einheitsvektors $\phi \in \mathcal{H}$ mit $\|\phi\| = 1$ ist ein Zustand durch $\omega(A) = (\phi, A\phi)$ gegeben. Diesen Zustand bezeichnet man als *Vektorzustand*.

GNS-Konstruktion

Die GNS-Konstruktion vermittelt einen engen Zusammenhang zwischen der Hilbertraum-Formulierung und dem algebraischen Zugang. Dazu definieren wir den Begriff einer Darstellung.

Definition 2.1.6. Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei involutive Algebren mit Eins. Dann ist ein $*$ -Homomorphismus eine \mathbb{C} -lineare Abbildung $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ für die gilt

- (i) $\pi(AB) = \pi(A)\pi(B)$ und

(ii) $\pi(A^*) = \pi(A)^*$.

Eine *Darstellung* einer involutiven Algebra \mathcal{A} mit Eins ist ein $*$ -Homomorphismus $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{D})$ der Algebra in die linearen Operatoren eines dichten Teilraums \mathcal{D} eines Hilbertraums \mathcal{H} mit $\pi(\mathbb{1}) = 1$.

Ein Zustand der Algebra \mathcal{A} kann durch einen Einheitsvektor $\Omega \in \mathcal{H}$ und eine Darstellung π durch

$$\omega(A) = (\Omega, \pi(A)\Omega) \quad (2.2)$$

angegeben werden. Die GNS-Konstruktion zeigt, dass die Umkehrung auch gilt.

Theorem 2.1.1. Sei ω ein Zustand auf der involutiven Algebra \mathcal{A} mit Eins. Dann gibt es eine Darstellung π der Algebra durch lineare Operatoren eines dichten Teilraums \mathcal{D} eines Hilbertraums \mathcal{H} und einen Einheitsvektor $\Omega \in \mathcal{D}$, so dass gilt

$$\omega(A) = (\Omega, \pi(A)\Omega) \quad (2.3)$$

und $\mathcal{D} = \{\pi(A)\Omega, A \in \mathcal{A}\}$. Dabei sind $\mathcal{H}, \mathcal{D}, \Omega$ und π bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt [18].

Damit kann jede C^* -Algebra durch eine C^* -Algebra beschränkter linearer Operatoren $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ auf einem Hilbertraum \mathcal{H} dargestellt werden. Unterschiedliche Zustände ω können allerdings zu unitär inäquivalenten GNS-Darstellungen führen. Zu einem gegebenen Zustand ω bezeichnen wir die Menge aller Dichtematrizen auf einem Hilbertraum \mathcal{H} der GNS-Konstruktion als *Folium* von ω . Durch die Wahl einer Darstellung gehen die Zustände ω' verloren, deren Folia in Hilberträumen \mathcal{H}' liegen, die unitär inäquivalent zu \mathcal{H} sind.

2.2 Das lineare skalare Feld

Für den Rest dieses Kapitels wollen wir die Observablenalgebra für ein lineares skalares Feld auf einer global hyperbolischen Raumzeit entwickeln. Dabei interessieren wir uns für lineare partielle hyperbolische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Anstatt, wie üblich die Klein-Gordon-Gleichung zu betrachten, die einen Spezialfall dieser Differentialgleichungen darstellt, wollen wir den allgemeineren Fall betrachten, da wir uns in Kapitel 4 an den hier angeführten Ergebnissen für lineare hyperbolische Differentialgleichungen orientieren werden.

2.2.1 Die Formulierung mit Anfangswerten

Zur Formulierung einer Quantenfeldtheorie auf global hyperbolischen Raumzeiten (siehe Kapitel 1.5) ist es wichtig, für die Felder eine Anfangswert-Formulierung zu finden. Die Lösungen ϕ der Feldgleichung lassen sich dann aus den Anfangswerten, den sogenannten Cauchy-Daten, die sich auf einer dreidimensionalen, raumartigen Hyperfläche Σ befinden und einem retardierten und avancierten Propagator, E^\pm , bestimmen. Allerdings existiert nicht für jede Differentialgleichung eine wohldefinierte Anfangswert-Formulierung. Dabei ist eine Anfangswert-Formulierung wohldefiniert, falls kleine Variationen der Anfangsdaten ebenfalls nur kleine Änderungen der Lösungen nach sich ziehen. Dies muss gewährleistet sein, da Anfangswerte nur mit endlicher Genauigkeit gemessen werden können. Außerdem darf eine Variation der Anfangsdaten in einer Teilmenge $S \subset \Sigma$ nur Änderungen der Lösungen in der kausalen Zukunft

von S , also in $J^+(S)$ verursachen, ansonst könnten Signale schneller als mit Lichtgeschwindigkeit übertragen werden, was der Grundannahme der Relativitätstheorie widerspricht.

Wir betrachten die lineare hyperbolische Differentialgleichung in zweiter Ordnung (vgl. [20]) auf einer global hyperbolischen Mannigfaltigkeit (\mathcal{M}, g_{ab})

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi + A^a\nabla_a\phi + B\phi + C = 0 \quad , \quad (2.4)$$

wobei ∇_a ein beliebiger Ableitungsoperator, A^a glattes Vektorfeld, B und C beliebige glatte Funktionen und g_{ab} eine beliebige glatte Lorentz-Metrik ist. Wir setzen im folgenden $A^a = 0$, $C = 0$ und $V := B$, da wir uns im Kapitel 4 für solche Gleichungen interessieren. Es folgt

$$(g^{ab}\nabla_a\nabla_b + V)\phi = 0 \quad \text{mit} \quad V \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \quad . \quad (2.5)$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der Klein-Gordon Gleichung um die glatte Funktion V .

2.2.2 Die kovariante Feldgleichung

Wir wollen für konkrete Rechnungen in nachfolgenden Kapiteln die kovariante Feldgleichung in lokalen Koordinaten angeben:

$$(\square_g + V)\phi = 0 \quad , \quad (2.6)$$

mit $\square_g = |g|^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu g^{\mu\nu}|g|^{\frac{1}{2}}\partial_\nu$, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, $|g| = |\det(g_{\mu\nu})|$ sowie $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. Die Kovarianz der Feldgleichung (2.6) folgt dabei aus der Invarianz des linearen Differentialoperators zweiter Ordnung \square_g unter Koordinatentransformation [30].

Für Differentialgleichungen der Form (2.4), (2.5) und (2.6) existieren aufgrund der globalen Hyperbolizität globale Fundamentallösungen, und das Cauchy-Problem ist eindeutig lösbar, wie wir im folgenden erläutern wollen.

Seien $\rho_0(u) : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \ni f \rightarrow f|_\Sigma \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ der Restriktionsoperator und $\rho_1(u) : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \ni f \rightarrow (n^a\nabla_a f)|_\Sigma \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ die Normalenableitung auf Σ .

Theorem 2.2.1. (Cauchy-Problem): Sei Σ eine beliebige Cauchy-Fläche und sei $u_0, u_1 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, sodass $(\square_g + V)u = 0$, $\rho_0(u) = u_0$, $\rho_1(u) = u_1$ mit $\text{supp } u \subset (\cup_i \cup_\pm J^\pm(\text{supp } u_i))$ [19].

Aufgrund dieses Theorems existieren eindeutige, retardierte und avancierte Fundamentallösungen. Dabei handelt es sich um eindeutig bestimmte Operatoren $E^\pm : \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ zum Differentialoperator $(\square_g + V)$ mit den Eigenschaften:

$$(\square_g + V)E^\pm = E^\pm(\square_g + V) = \mathbf{1}, \quad (2.7)$$

mit $\text{supp}(E^\pm f) \subset J^\pm(\text{supp } f)$, $\forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})$. Wir definieren den Operator $E := E^+ - E^-$. Dieser stellt eine antisymmetrische Distribution dar und heißt *kausale* Fundamentallösung. Es gilt folgende Operatorgleichung

$$(\square_g + V)E = E(\square_g + V) = 0 \quad \text{mit} \quad \text{supp}(Ef) \subset \cup_\pm J^\pm(\text{supp } f). \quad (2.8)$$

Dabei ist die Wirkung von E auf eine Testfunktion $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})$ durch $(\square_g + V)Ef = (\square_g + V)(E^+ f - E^- f) = f - f = 0$ gegeben und es gilt $u = Ef$ mit $\text{supp}(Ef) \subset \cup_\pm J^\pm(\text{supp } f)$.

Jedes $k \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ definiert ein lineares Funktional auf $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})$ durch das Skalarprodukt, $\langle k, f \rangle = \int k f dV$, wobei V das Volumenelement bezüglich der Metrik g_{ab} ist. Den dualen Raum, die Distributionen (vgl. A.1), bezeichnen wir mit $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})'$.

Zu dem Operator $E : \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ existiert bezüglich des Skalarprodukts der adjungierte Operator $E' : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})' \rightarrow \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})'$. Mit den Einbettungen $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M}) \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})'$ sowie $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \hookrightarrow \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})'$ kann E stetig erweitert werden zu E' , wobei $E'|_{\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})} = -E$ gelten soll.

Analog existieren bezüglich des Skalarprodukts zu den Operatoren $\rho_0, \rho_1 : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ adjungierte Operatoren $\rho'_0, \rho'_1 : \mathcal{C}^\infty(\Sigma)' \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})'$, und wir konstruieren die Operatoren $(-E)'\rho'_0, (-E)'\rho'_1 : \mathcal{C}^\infty(\Sigma)' \rightarrow \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})'$.

Auch hier existieren die Einbettungen $\mathcal{C}_0^\infty(\Sigma) \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty(\Sigma)'$ sowie $\mathcal{C}^\infty(\Sigma) \hookrightarrow \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)'$. Folgendes Korollar beweist die Existenz einer stetigen Einschränkung.

Korollar 2.2.1. $E\rho'_0, E\rho'_1$ lassen sich einschränken auf stetige Operatoren von $\mathcal{C}_0^\infty(\Sigma) \rightarrow \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})$ und

$$u = E\rho'_0 u_1 - E\rho'_1 u_0 \quad (2.9)$$

ist die Lösung des Cauchy-Problems mit den Anfangswerten u_0, u_1 [19].

Wir können in einem nächsten Schritt die stetigen Operatoren $E\rho'_0, E\rho'_1$ verwenden, um einen Zusammenhang zwischen den kanonischen Vertauschungsrelationen von Operatoren auf der Cauchy-Fläche Σ und Operatoren auf ganz \mathcal{M} herzustellen. Dazu betrachten wir eine Darstellung der kanonischen Vertauschungsrelationen über Σ . Diese besteht aus einem komplexen Hilbertraum \mathcal{H} und symmetrischen Operatoren $\Theta(f), \pi(f')$ die linear in $h \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$ sind, dicht in \mathcal{H} liegen und die Bedingung $[\Theta(f), \pi(f')] = i \langle f, f' \rangle = i \int f f' dS$ erfüllen, wobei dS das induzierte riemannsche Volumenelement der Cauchy-Fläche Σ ist.

Theorem 2.2.2. [19] Sei (Θ, π) eine Darstellung der kanonischen Vertauschungsrelationen auf einer Cauchy-Fläche $\Sigma \subset \mathcal{M}$. Der Feldoperator im Sinne von Distributionen sei

$$\phi = E\rho'_0 \pi - E\rho'_1 \Theta. \quad (2.10)$$

Dann löst ϕ die Klein-Gordon Gleichung $(\square + V)$ und es gilt

$$[\phi(f), \phi(g)] = \frac{1}{i} \langle f, E g \rangle, \quad f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M}). \quad (2.11)$$

Schließlich können wir die Feldgleichung in der Form $\phi((\square + V)f) = 0$ angeben.

Bei den Feldoperatoren ϕ in der herkömmlichen Formulierung der Quantenfeldtheorie handelt es sich um operatorwertige Distributionen, einer linearen Abbildung vom Raum der Testfunktionen $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})$ in die Menge der beschränkten Operatoren $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ auf einem Hilbertraum \mathcal{H} mit geeigneten Stetigkeitsbedingungen. Theorem 2.2.2 erlaubt allerdings auch die Konstruktion von Quantenfeldern als abstrakte Algebren in folgendem Sinne.

Wir betrachten wieder die Feldgleichung (2.6) und setzen für den Differentialoperator $D := (\square_g + V)$. Wir konstruieren die Quantenfelder ϕ im Sinne abstrakter Algebren mit folgenden Eigenschaften: ϕ ist eine lineare Abbildung von $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})$ in eine (assoziative) Algebra \mathcal{A} mit Einselement und mit Involution (*-Operation), sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) Die Elemente $\phi(f)$, mit $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})$, erzeugen \mathcal{A} ,
- (ii) ϕ erfüllt die Feldgleichung im Sinne von Distributionen, d.h. $\phi(Df) = 0, f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})$,
- (iii) $[\phi(f), \phi(g)] = -i \langle f, Eg \rangle$,
- (iv) $\phi(f)^* = \phi(\bar{f})$.

2.2.3 Die Konstruktion der Algebra

Für die Feldgleichungen der Form (2.4) bis (2.6) wird eine mögliche Algebra wie folgt definiert [31]: Aus den abstrakten Symbolen $\psi(f)$ bilden wir komplexe (endliche) Linearkombinationen endlicher Produkte. Diese ergeben zusammen mit dem Einselement $\mathbb{1}$ die sogenannte *freie Algebra* \mathcal{A}_0 ,

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ \sum_n c_n \psi(f_1) \psi(f_2) \dots \psi(f_n) : f_i \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M}), c_n \in \mathbb{C}, n < \infty \right\} \cup \{\mathbb{1}\}. \quad (2.12)$$

\mathcal{A}_0 ist dabei eine involutive assoziative Algebra (*-Algebra). $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}_0$ ist die Menge einzelner Symbole $\psi(f)$ die sich, entsprechend den Bedingungen (ii) bis (iv), für beliebige Testfunktionen wie folgt schreiben lassen,

$$\mathcal{J} = \left\{ \psi(Df), [\psi(f), \psi(g)] + i \langle f, Eg \rangle \mathbb{1}, \psi^*(f) - \psi(\bar{f}), f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M}) \right\}.$$

\mathcal{J} ist die erzeugende Menge des *-Ideals $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{A}_0$, mit

$$\mathcal{I}_0 = \left\{ \sum A_i B_i C_i : A_i, C_i \in \mathcal{A}_0, B_i \in \mathcal{J}, \forall f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M}), n, m < \infty \right\}.$$

Dass \mathcal{I}_0 ein beidseitiges *-Ideal von \mathcal{A}_0 ist, sieht man leicht. Wir konstruieren die Quotientenalgebra \mathfrak{A} wie folgt: Es existiert ein Homomorphismus π

$$\pi : \begin{cases} \mathcal{A}_0 & \longrightarrow \mathfrak{A} \\ \mathcal{C} & \longmapsto \mathcal{C} + \mathcal{I}_0 \end{cases} \quad (2.13)$$

mit $\pi(\mathcal{I}_0) = 0$. Dabei bildet die Quotientenalgebra $\mathfrak{A} = \frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{I}_0}$ die Menge der physikalischen Observablen des Systems. Observablen, die sich nur um ein Element aus dem Ideal \mathcal{I}_0 unterscheiden, werden dadurch zu einem Element aus \mathfrak{A} und wir schreiben für einen Repräsentanten $\mathfrak{A} \ni \phi(f) := \psi(f) + \mathcal{I}_0$.

Wie verhalten sich einzelne Feldoperatoren aus \mathfrak{A} ? Die Eigenschaften (i) folgt aus der Eigenschaft der Menge \mathcal{I}_0 , ein *-Ideal zu sein, und (iv) ist leicht zu sehen. Zur Überprüfung von (ii) wenden wir den Differentialoperator D auf $\phi(f)$ an:

$$D(\phi(f)) = D(\psi(f) + \mathcal{I}_0) = \underbrace{\psi(Df)}_{\in \mathcal{I}_0} + \mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_0.$$

\mathcal{I}_0 ist die Null in der Quotientenalgebra. Deshalb sieht man durch einfache Rechnung, dass ein beliebiges Element $\phi(f) = \psi(f) + \mathcal{I}_0$ aus \mathfrak{A} eine Lösung der Feldgleichung darstellt. Berechnen wir schließlich noch den Kommutator

$$\begin{aligned} [\phi(f), \phi(g)] + i \langle f, Eg \rangle \mathbb{1} &= \\ [\psi(f) + \mathcal{I}_0, \psi(g) + \mathcal{I}_0] + i \langle f, Eg \rangle \mathbb{1} &= \underbrace{[\psi(f), \psi(g)] + i \langle f, Eg \rangle \mathbb{1}}_{\in \mathcal{I}_0} + \mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

so sieht man, dass Elemente der Form $\psi(f) + \mathcal{I}_0 \in \mathfrak{A}$ die Eigenschaften (i) bis (iv) einer freien Quantenfeldtheorie erfüllen.

Die Observablen in \mathfrak{A} entsprechen den Produkten des linearen Feldes $\phi(f)$. Es sind jedoch nicht alle Observablen von physikalischem Interesse in der Algebra \mathfrak{A} enthalten. Man kann \mathfrak{A} als eine “minimale“ Algebra auffassen, die genügend viele Elemente enthält, damit die Theorie formuliert werden kann. Der Energie-Impuls-Tensor, der Potenzen von Feldern enthält, ist beispielsweise nicht in \mathfrak{A} enthalten. Die Algebra muss also geeignet erweitert werden. Wie sich herausstellt, sind die Methoden des Minkowski-Raums nicht ohne weiteres auf gekrümmten Raumzeiten anwendbar. So hängt die Normalordnung zur Definition von Wick-Produkten im Minkowski-Raum von der Existenz eines bevorzugten Vakuums ab, in Bezug auf das die Normalordnung durchgeführt wird. Auf gekrümmter Raumzeit existiert allerdings kein ausgezeichneter Vakuumzustand. Deshalb entwickelt man andere Konzepte. So ist die Renormierbarkeit des Erwartungswertes des Energie-Impuls-Tensors $\langle T_{ab} \rangle$ ein Kriterium für die Wahl physikalisch sinnvoller Zustände. Erfüllen Zustände diese Bedingung, bezeichnet man sie als Hadamard-Zustände¹. Für weitergehende Diskussionen verweisen wir auf [32].

¹Eine Definition von Hadamard-Zuständen findet man in [12].

Kapitel 3

Quantenfeldtheorien auf Raumzeiten mit Topologieänderungen

Die Vorteile, die sich aus dem algebraischen Zugang ergeben, haben wir bereits in Kapitel 2 diskutiert. Ein wesentlicher Punkt ist dabei, dass die Algebra der Observablen unabhängig von der Wahl eines Hilbertraums ist. Voraussetzung zur Bestimmung der Algebra ist allerdings die Existenz einer Fundamentallösung E zur Definition von Feldoperatoren, die die Eigenschaften einer freien Quantenfeldtheorie für Gleichungen der Art (2.6) erfüllen. Auf global hyperbolischen Raumzeiten existieren immer Fundamentallösungen und das Aufstellen der Algebra ist einfach (vgl. 2.2.3). Das Finden geeigneter Zustände ist hingegen nicht ohne Probleme. Wir wollen an dieser Stelle allerdings nicht weiter darauf eingehen und verweisen auf [32]. Die Existenz einer Fundamentallösung auf nichtglobalhyperbolischen Raumzeiten, worunter auch topologieändernde Raumzeiten fallen können, ist hingegen nicht sichergestellt.

Scheitert man beim Versuch der Definition einer Quantentheorie über die gewöhnliche Hilbertraum-Formulierung, so könnte das am “falsch“ gewählten Hilbertraum liegen, der zur Konstruktion verwendet wird. Durch die Wahl eines Hilbertraums \mathcal{H} legt man sich auf ein Folium des Zustands ω von Dichtematrizen auf \mathcal{H} fest. Die ebenfalls zur Algebra gehörenden Zustände ω' , deren Folia in Hilberträumen \mathcal{H}' liegen, die bezüglich der Darstellungen inäquivalenten zum Hilbertraum \mathcal{H} sind, können verloren gehen (vgl. Kapitel 2). Der Vorteil der algebraischen Formulierung liegt darin, dass alle zur Algebra gehörenden Zustände bei der Formulierung erhalten bleiben, wohingegen bei der Hilbertraum-Formulierung durch die Wahl von \mathcal{H} eine Vorauswahl und damit eine Einschränkung auf spezielle Zustände stattfindet. In der Allgemeinheit des algebraischen Formalismus liegt eine Chance, Quantenfelder auf Raumzeiten mit Topologieänderungen besser zu verstehen.

Betrachten wir die Versuche, die unternommen wurden, um eine Quantenfeldtheorie auf solchen Raumzeiten einzuführen. Die Hauptpfeiler, die die Sorkin-Vermutung (vgl. Kapitel 1.5.3) stützen, sind wohl die Untersuchungen der elementaren Kobordismen in zwei Dimensionen. Während die Versuche, eine wohldefinierte Quantenfeldtheorie auf der $(1+1)$ -Hosentopologie einzuführen, scheiterten, konnte auf der Yarmulke, trotz entarteter Lorentzmetrik, ein wohldefiniertes Quantenfeld konstruiert werden. Die Fortschritte bezüglich eines strengen Beweises

der Sorkin-Vermutung sind hingegen spärlich. So ist es noch nicht gelungen zu zeigen, dass der elementare Kobordismus mit Morse-Index $\lambda = 2$ in vier Dimensionen, ein wohldefiniertes Quantenfeld trägt [27].

Wir interessieren uns im Folgenden weniger für die Sorkin-Vermutung, sondern wollen die Art und Weise untersuchen, wie die Quantenfeldtheorien auf den elementaren Kobordismen in zwei Dimensionen, der Hosentopologie sowie die Yarmulke, konstruiert wurden.

3.1 Quantenfeldtheorie auf den elementaren Kobordismen

3.1.1 Modenzerlegung mit Randbedingungen

Betrachtet wird ein skalares masseloses Feld auf dem Hintergrund der Hose, eine Raumzeit mit Topologieänderung. Es soll dabei die flache Hosentopologie verwendet werden, da in zwei Dimensionen die Krümmung flach gewählt werden kann, und eine Metrik, die überall lorentzsch ist, außer am singulären Punkt. In diesem Ansatz wird der singuläre Punkt von der Mannigfaltigkeit entfernt, und man erhält wieder eine globale Definition der Metrik. Die Ränder $-\lambda$ und λ im Hosenbund, im Folgenden mit “in“-Bereich bezeichnet, sowie $-\lambda$ und 0^- bzw. 0^+ und λ in den Beinen, im Folgenden mit “out“-Bereich bezeichnet, werden miteinander identifiziert.

Ansatz von Anderson und DeWitt [9]

Ausgangspunkt zur Untersuchung von Quantenfeldern ist die Wahl von Auf- und Absteigeoperatoren, die entsprechende Vertauschungsrelationen erfüllen. Die Felder, die im “in“ bzw. im “out“ Bereich leben, werden mit Hilfe dieser Operatoren definiert. Zu diesen Operatoren existieren unterschiedliche Vakua für den “in“- und den “out“-Bereich. Durch Vergleich der “natürlichen“ Fockraum Vakua vor und nach der Topologieänderung wird der Schluss gezogen, dass unendliche Teilchen und Energieerzeugung auftritt und deshalb Topologieänderung nicht stattfinden kann [9]. Leider sind diese Rechnungen nicht im Detail angegeben. Diese Annäherung an das Problem ist allerdings unvollständig, wie Manogue, Copeland und Dray gezeigt haben.

Ansatz von Manogue, Copeland und Dray [10]

Ein Quantenfeld wird nach einem vollständiger Satz von Eigenmoden entwickelt, die bezüglich des inneren Klein-Gordon Produkts [10] orthonormal sind. Dabei treten Zusatzterme wegen der Periodizität der Hose auf, die in den “in“- und “out“-Bereichen einem Zylinder gleicht (vgl. Abbildung 1.6). Aus der Forderung der zeitgleichen Vertauschungsrelationen für das Feld und seinem kanonisch konjugiertem Impuls folgen die kanonischen Vertauschungsrelationen der Auf- und Absteigeoperatoren. Damit kann ein Vakuumvektor in üblicher Weise definiert werden. Wichtig ist, dass dabei zwischen Moden aus dem rechten, linken und dem Bund-Bereich der Hose unterschieden wird. Wesentlich für die Lösung des Problems ist die Wahl der Propagationsregeln, sowie die Wahl der sogenannte “in“- und “out“-Zustände. Als physikalische Bedingung an die Bogolubov-Transformation zwischen den “in“- und “out“-Zuständen wird die Zeitunabhängigkeit des inneren Klein-Gordon-Produkts gestellt (vgl. [10]). Dadurch sind

die Propagationsregeln bis auf einen freien Parameter eindeutig. Mit Hilfe der Bogolubov-Transformation werden nun die Auf- und Absteigeoperatoren aus den Beinbereichen nach denen im Bund-Bereich entwickelt. Es wird schließlich der Vakuumerwartungswert des Energie-Impuls-Tensors, der aus Feldern besteht, die aus Operatoren des Beinbereichs ausgedrückt werden, im Bund-Bereich berechnet.

Der dadurch entstandene Ausdruck für den Erwartungswert der Energie ist divergent. Er läßt sich nicht durch Versuche der Renormierung, z.B. Normalordnung oder entsprechende Anpassung des freien Parameters der Propagationsregeln beschränken. Die Rechnung bestätigt die Schlussfolgerungen von Anderson und DeWitt, dass eine Topologieänderung unendlich viel Energie benötigt.

Harris und Dray haben in [33] gezeigt, dass dieses Verhalten nicht darauf beruht, dass der singuläre Punkt entfernt und eine flache Mannigfaltigkeit verwendet wurde, sondern alleine von der Topologieänderung der Raumzeit.

3.1.2 Die Pfadintegralmethode

Ein anderer Zugang zur Berechnung des Erwartungswertes der Energie versucht, die oben explizit bestimmte Propagationsregel zu vermeiden. Anstatt mit dem Feldoperator, der in Moden entwickelt wird, zu arbeiten, verwendet man eine sogenannte "Quanten-Zustandsfunktion" $Z = Z(g)$, die in der Pfadintegralmethode der Quantenfeldtheorie Anwendung findet. Dadurch kann vermieden werden, dass eine explizite Angabe der Propagation der klassischen Lösung nötig ist. Hier ist das Verhalten des Logarithmus der Zustandsfunktion bezüglich der Divergenz von Interesse. Aus der Variation des Logarithmus der Zustandsfunktion Z nach der Metrik g_{ab} kann der Energieerwartungswert $\langle T_{ab} \rangle := \frac{\delta(\log Z)}{\delta g_{ab}}$ bestimmt werden. Unter Wahl geeigneter Bedingungen kann dieser Wert für die Hose und die Yarmulke angegeben werden. Sogar nach Durchführung von Renormierungen divergiert der Energieerwartungswert bei Betrachtungen der Hosentopologie in der Nähe des Lichtkegels des Morsepunkts. Bei der Yarmulke hingegen divergiert der renormierte Energieimpulstensor nur am Morse-Punkt, wesentlich ist aber, dass die Gesamtenergie endlich ist. In [26] finden sich Hinweise auf die Rechnung, diese ist aber anscheinend nicht veröffentlicht.

Wie wir im vorhergehenden Kapitel gesehen haben, liefert die algebraische Methode einen Weg, unabhängig vom Hilbertraum, die Observablenalgebra zu definieren. Erst bei der Darstellung kommt der Hilbertraum ins Spiel. Auch haben wir gesehen, dass es bei Quantenfeldtheorien auf gekrümmter Raumzeit, keine ausgezeichnete Symmetriegruppe, und deshalb a priori, keinen ausgezeichneten Hilbertraum gibt. Die Wahl unterschiedlicher Hilberträume kann zu unterschiedlichen Theorien führen. Auch im Fall der Hose, ist aufgrund der Topologieänderung nicht klar, ob es überhaupt einen vernünftigen Vakuumzustand gibt, und ob deshalb die Modenzerlegung sinnvoll ist.

In jedem Fall scheint die instantane Topologieänderung eines kausal unstetigen Kobordismus Probleme zu bereiten. Wie Sorkin in [26] erwähnt, läßt sich auf der zweidimensionalen kausal stetigen Yarmulke ein wohldefiniertes Quantenfeld konstruieren. Die oben erwähnten Ergebnisse werden in der Sorking-Vermutung (vgl. Kapitel 1.5) zusammengefasst. Darin wird

vermutet, dass die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors durch die kausale Unstetigkeit der Hosentopologie verursacht wird. Ausgehend von diesen Ergebnissen wurde von Braunstein [14] ein Modell entwickelt, wobei die Topologieänderung simuliert wird und somit die Probleme der kausalen Unstetigkeit umgangen werden können. Dies wollen wir ausführlich im nächsten Kapitel diskutieren und im Anschluss daran, in Anlehnung an Braunsteins Idee, ein eigenes Modell entwickeln. Wir wollen schließlich noch erwähnen, dass die Idee der kontinuierlichen Topologieänderung, die auf die Felder direkt wirkt und nicht auf die unterliegende Mannigfaltigkeit, in einem Modell von Balachandran, Bimonte, Marmo und Simoni in [13] auf die Quantenmechanik angewandt wurde.

Kapitel 4

Modell zur Simulation einer Topologieänderung

Aufgrund der Bemerkungen in den vorhergehenden Kapiteln wissen wir, dass sich die Änderung der Topologie einer Lorentz-Raumzeit und kausales Verhalten widersprechen. Im Kapitel über Morse-Raumzeiten 1.4 haben wir eine Möglichkeit gesehen, dieses Problem zu umgehen. Hier soll eine weitere Möglichkeit dargestellt werden, wie sich die Topologie einer Raumzeit unter Erhaltung der Kausalität ändern kann. Die Idee hierbei ist, dass sich die Topologie kontinuierlich ändert, besser gesagt, wir simulieren eine Topologieänderung, indem wir kontinuierlich veränderliche Randbedingungen an das Feld stellen, das auf einer beliebigen zweidimensionalen Raumzeit lebt. Diese Randbedingungen sollen durch ein Potential verwirklicht werden. Probleme wie kausale Unstetigkeit können so umgangen werden, weil die eigentliche Topologie der Raumzeit unverändert bleibt. Diese Idee wurde aus der Arbeit von Braunstein [14] entnommen und weiterentwickelt. Bevor wir auf Details unserer Arbeit eingehen soll diese Methode kurz dargestellt werden.

4.1 Simulation einer Topologieänderung

Ausgehend von den Ergebnissen von Anderson und DeWitt, worin aufgrund der instantanen Topologieänderung ein divergenter Energie-Impuls-Tensor auftritt, wird wie folgt vorgegangen: Es wird eine Methode entwickelt, in der eine instantane Topologieänderung vermieden werden soll. Hauptbestandteil soll sein, dass die Felder, die sich auf der Hose ausbreiten, eine Topologieänderung nur auf dem Niveau der Amplituden spüren sollen. Das heißt, Quantenfelder, die sich auf der Hose ausbreiten, erfahren eine allmählich ansteigende Tunnelwahrscheinlichkeit, ausgehend von der Konfiguration der ursprünglichen zur "neuen" Topologie. Mithilfe der Lagrangedichte (4.1) wird das $1 + 1$ Hosenproblem behandelt. Die Topologieänderung wird durch ein physikalisches Modell beschrieben, welches eine Barriere besitzt, das eine sich glatt ändernde Tunnelwahrscheinlichkeit zwischen zwei räumlichen Regionen beschreibt [14]. $V(t)$ beschreibt die "Höhe" der Tunnelbarriere und man kann sich vorstellen, dass diese, falls sie zu Beginn sehr groß ist, eine Situation beschreibt, in der ein anfänglich effektiv getrennter Bereich sich langsam wieder verbindet, falls $V(t)$ gegen null geht. Die Feldmoden sehen hierbei eine langsam ansteigende Tunnelwahrscheinlichkeit und nur die hochfrequenten Moden können tunneln, während die niedrigfrequenten reflektiert werden. Wie wird dieses Modell realisiert?

Mit Hilfe entsprechender Randbedingung wird zunächst eine allgemeine klassische Lösung der entsprechenden Feldgleichung, die aus der Lagrangedichte folgt, konstruiert. Diese klassische Lösung wird im Folgenden für genügend langsam ändernde Potentialbarrieren durch entsprechende einlaufende und auslaufende harmonische Wellen approximiert. Anhand dieser Approximation der allgemeinen klassischen Lösung lassen sich die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten für die ein- und auslaufenden Wellen berechnen.

Die Definition einer Quantenfeldtheorie wird wie folgt durchgeführt: Wie im Fall der kanonischen Quantisierung üblich, wird ein zunächst beliebiges Feld in einen vollständigen Satz von Eigenmoden, auf die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren wirken, zerlegt. Dabei erfüllen dieses Feld und sein kanonisch konjugierter Impuls die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen. Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren erfüllen folglich die kanonischen Vertauschungsrelationen. Die im ersten Teil berechneten ein- und auslaufenden klassischen Lösungen und die Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren werden schließlich zueinander in Beziehung gestellt. Aus diesen Beziehungen läßt sich die Gesamtenergie berechnen, die bei genügend langsamer Änderung der Potentialbarriere endlich ist (Für genauere Betrachtungen siehe [14]).

Ausgehend von der Idee einer kontinuierlichen Veränderung von Randbedingungen, die Einschränkungen an die Felder stellen, anstatt direkt eine instantane Topologieänderung der Raumzeit zuzulassen, werden wir im Folgenden ein Modell zur Simulation einer Topologieänderung entwickeln und die entsprechende Observablenalgebra aufstellen. Wir beschränken uns dabei auf eine zweidimensionale flache Raumzeit mit den Parametern x und t . Bei $x = 0$ befindet sich ein Potentialbarriere $V(t)$, die von der Zeit abhängt und auf das skalare Feld wirkt. Dieses soll die Änderung der Raumzeittopologie simulieren, wobei sich das Potential kontinuierlich mit der Zeit ändern soll. Dadurch soll eine Topologieänderung simuliert werden. Dieses Modell, das von Braunstein [14] vorgeschlagen wird, soll durch folgende Lagrangedichte beschrieben werden

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x} \right)^2 - 2V(t)\delta(x)\Phi(t, x)^2 \right], \quad (4.1)$$

wobei $\Phi(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein skalares Feld beschreibt.

4.2 Die Feldgleichungen

Wir wollen das Prinzip der stationären Wirkung verwenden, um aus der Lagrangedichte (4.1) die entsprechenden Feldgleichungen herzuleiten. Es soll im nächsten Abschnitt das Prinzip der stationären Wirkung im allgemeinen Fall angegeben werden. Wir sehen dabei, welche Bedingungen an das Feld zu stellen sind, und wenden diese Methode dann auf unseren Fall an. Dieser kann wegen der Singularität des Potentials nicht als Spezialfall der allgemeinen Herleitung angesehen werden, und eine explizite Erklärung ist notwendig.

4.2.1 Allgemeine Herleitung

Die Feldgleichungen können wie in der klassischen Mechanik aus dem Prinzip der stationären Wirkung hergeleitet werden. Sei \mathcal{L} eine Funktion, die von glatten Feldern $\Phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$, $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{G})$ und ihren ersten Ableitungen abhängt. \mathcal{G} sei ein kompaktes Gebiet mit genügend

glatttem Rand $\partial\mathcal{G}$. Unter diesen Voraussetzungen soll das Wirkungsfunktional

$$S_{\mathcal{G}}(\Phi) = \int_{\mathcal{G}} d^4x \mathcal{L}(\Phi, \partial_{\mu}\Phi) \quad (4.2)$$

unter der Variation der Felder, die feste Werte am Rand annehmen, stationär sein. Sei $\Psi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{G})$ ein Feld, das am Rand von \mathcal{G} verschwindet. Dann gilt

$$\frac{d}{d\epsilon} S_{\mathcal{G}}(\Phi + \epsilon\Psi)|_{\epsilon=0} = 0 \quad (4.3)$$

und es folgt unter Verwendung der Wirkung (4.2)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{G}} d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}(\Phi + \epsilon\Psi, \partial_{\mu}(\Phi + \epsilon\Psi))}{\partial(\Phi + \epsilon\Psi)} \frac{d(\Phi + \epsilon\Psi)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mu} \frac{\partial\mathcal{L}(\Phi + \epsilon\Psi, \partial_{\mu}(\Phi + \epsilon\Psi))}{\partial(\partial_{\mu}(\Phi + \epsilon\Psi))} \frac{d(\partial_{\mu}(\Phi + \epsilon\Psi))}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right), \\ 0 &= \int_{\mathcal{G}} d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}(\Phi, \partial_{\mu}\Phi)}{\partial\Phi} \Psi(x) + \sum_{\mu} \frac{\partial\mathcal{L}(\Phi, \partial_{\mu}\Phi)}{\partial(\partial_{\mu}\Phi)} \partial_{\mu}\Psi(x) \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Der zweite Term aus (4.4) kann mit partieller Integration umgeformt werden. Dabei nützen wir die oben erwähnten Einschränkungen an \mathcal{G} und $\partial\mathcal{G}$, sowie die Eigenschaft, dass Ψ am Rand von \mathcal{G} verschwindet. Damit ergibt sich aus (4.4)

$$0 = \int_{\mathcal{G}} d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}(\Phi, \partial_{\mu}\Phi)}{\partial\Phi} \Psi(x) - \sum_{\mu} \partial_{\mu} \frac{\partial\mathcal{L}(\Phi, \partial_{\mu}\Phi)}{\partial(\partial_{\mu}\Phi)} \Psi(x) \right). \quad (4.5)$$

Es ist aus Gleichung (4.5) leicht abzulesen, dass die Wirkung $S_{\mathcal{G}}(\Phi)$ für alle Ψ stationär ist, falls der Zusammenhang

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\Phi, \partial_{\mu}\Phi)}{\partial\Phi} = \sum_{\mu} \partial_{\mu} \frac{\partial\mathcal{L}(\Phi, \partial_{\mu}\Phi)}{\partial(\partial_{\mu}\Phi)} \quad (4.6)$$

für Φ innerhalb des Gebietes \mathcal{G} erfüllt ist. Daraus kann man nun aus einer Lagrangedichte $\mathcal{L}(\Phi, \partial_{\mu}\Phi)$ die entsprechende Feldgleichung bestimmen.

4.2.2 Feldgleichung des Modells

Das Standardverfahren zur Herleitung der Feldgleichung aus einer Lagrangedichte, das in Abschnitt 4.2.1 verwendet wurde, geht von glatten Feldern aus. Zur Herleitung von Gleichung (4.6) reicht es aus, dass die ersten Ableitungen des Feldes Φ nach den Koordinaten x^{μ} existieren. In der Feldgleichung taucht hingegen die zweite Ableitung auf, weshalb für die Felder gefordert wird, dass sie aus $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ stammen.

Die Methode aus Abschnitt 4.2.1 wird auf die Lagrangedichte (4.1) angewendet, und es folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t})} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x})} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x} \right), \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi(x,t)} = -V(t)\delta(x)\Phi(x,t),$$

und somit für die Feldgleichung

$$\left(\square + V(t)\delta(x)\right)\Phi(x, t) = 0 \quad \text{mit} \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2). \quad (4.8)$$

Beim Ausdruck $(\square + V(t)\delta(x))$ handelt es sich aufgrund des singulären Potentials nicht um einen Differentialoperator. Da in der Feldgleichung (4.8) die δ -Distribution auftaucht, muss das Feld Φ stetig sein, damit das Produkt des Feldes mit dem singulären Potential wohldefiniert ist, wobei wir $V \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ wählen. Aus der expliziten Herleitung der Formel (4.6) sehen wir direkt, dass die Felder zusätzlich aus $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ sein müssen.

4.3 Die Bestimmung der Fundamentallösung

Wir versuchen im Folgenden eine Fundamentallösung für die Feldgleichung (4.8) zu bestimmen. Wie wir in Kapitel 2 gesehen haben, benötigt man im algebraischen Zugang die Fundamentallösung zur Bestimmung der Algebra der Feldoperatoren. Betrachten wir die Feldgleichung (4.8), so stellen wir fest, dass es sich nicht um eine lineare hyperbolische Differentialgleichung handelt, da das Potential zusammen mit der δ -Funktion einen singulären Ausdruck darstellt. Es besteht aber eine formale Ähnlichkeit, weshalb wir die uns an den Ergebnissen in Kapitel 2.2 orientieren wollen.

4.3.1 Die Wellengleichung

Betrachten wir die Feldgleichung (4.8), so fällt auf, dass für alle Bereiche des Raumes, außer für $x = 0$, der Potentialterm verschwindet, und somit die freie Wellengleichung gilt. Es werden zunächst die wesentlichen Ergebnisse der Analyse der freien Wellengleichung zusammengefasst, die bei der Herleitung einer Fundamentallösung für die Feldgleichung (4.8) benötigt werden.

Der Differentialoperator für die freie Wellengleichung lautet in den Koordinaten t und x

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad . \quad (4.9)$$

Wir wählen nun der Theorie der freien Wellengleichung gut angepasste Koordinaten, die sogenannten Lichtkegelkoordinaten $u = t - x$ und $v = t + x$. Mit der Formel $\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}$, wobei die neuen Koordinaten $\tilde{x}_i(x_i)$ Funktionen der ursprünglichen Koordinaten sind, wollen wir den Differentialoperator umschreiben. Mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}}_1 \frac{\partial}{\partial u} + \underbrace{\frac{\partial v(t, x)}{\partial t}}_1 \frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}}_{-1} \frac{\partial}{\partial u} + \underbrace{\frac{\partial v(t, x)}{\partial x}}_1 \frac{\partial}{\partial v}, \quad (4.10)$$

ausgedrückt durch die Lichtkegelkoordinaten, folgt aus dem Differentialoperator (4.9) der Differentialoperator in Lichtkegelkoordinaten (bis auf einen Faktor)

$$\square_{(u,v)} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \quad . \quad (4.11)$$

Wir suchen nun Fundamentallösungen der freien Wellengleichung (4.9) oder (4.11). Folgende Behauptung liefert geeignete Kandidaten.

Proposition 4.3.1. Der retardierte Propagator $E^+ = \Theta(u)\Theta(v)$ ist Fundamentallösung der Wellengleichung $\square_{(u,v)}$. Analog ist der avancierte Propagator $E^- = \Theta(-u)\Theta(-v)$ ebenfalls Fundamentallösung dieser Wellengleichung.

Beweis. Für eine Fundamentallösung E^\pm gilt folgender Zusammenhang

$$\square E^\pm = E^\pm \square = \mathbb{1} . \quad (4.12)$$

Für die in der Behauptung angegebene retardierte Fundamentallösung gilt

$$\square_{(u,v)}\Theta(u)\Theta(v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\Theta(u)\Theta(v) = \delta(u)\delta(v), \quad (4.13)$$

und somit folgt die Behauptung. Die avancierte Fundamentallösung unterscheidet sich von der retardierten Fundamentallösung nur durch das Inverse der Lichtkegelkoordinaten. Sie erfüllt folglich ebenfalls Gleichung (4.12), da sich Gleichung (4.13) durch Einsetzen der avancierten Fundamentallösung nicht ändert. \square

Bemerkung 4.3.1. Wir betrachten den allgemeineren Fall einer Quelle bei u' und v' . Somit ergibt sich als retardierte Fundamentallösung $E_{ret}^0(t, x, t', x') = \Theta(u - u')\Theta(v - v')$ mit $u = t - x$ und $v = t + x$, sowie $u' = t' - x'$ und $v' = t' + x'$. Die avancierte Lösung der freien Wellengleichung ergibt sich, wie bereits im Beweis zur Behauptung (4.3.1) erwähnt, aus der retardierten Fundamentallösung, indem man die Lichtkegelkoordinaten durch die inversen Lichtkegelkoordinaten ersetzt. Diese beschreiben eine Propagation entlang lichtartiger Wege in negativer Zeitrichtung, wobei sich die Quelle bei u' und v' befindet. Die entsprechende avancierte Fundamentallösung kann mit $E_{av}^0(t, x, t', x') = \Theta(u' - u)\Theta(v' - v)$ angegeben werden. In den Koordinaten t und x nimmt die retardierte bzw. avancierte Fundamentallösung die folgende Form an:

$$\begin{aligned} E_{ret}^0(t, x, t', x') &= \Theta(t - t' - x + x')\Theta(t - t' + x - x') = \Theta(t - t' - |x - x'|) , \\ E_{av}^0(t, x, t', x') &= \Theta(t' - t - x' + x)\Theta(t' - t + x' - x) = \Theta(t' - t - |x' - x|) . \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.3.2 Ansatz einer geometrischen Reihe

Wir suchen für die Feldgleichung (4.8) eine kausale Fundamentallösung in Analogie zu Abschnitt 2.2, wo wir lineare hyperbolische Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf global-hyperbolischen Raumzeiten betrachtet haben. Nach Definition einer Fundamentallösung 2.7 muss für diese folgender Zusammenhang gelten,

$$(\square + V(t)\delta(x))E_{ret/av}^V = E_{ret/av}^V(\square + V(t)\delta(x)) = \mathbb{1}. \quad (4.15)$$

Zur Bestimmung der retardierten bzw. avancierten Fundamentallösung, die wir im Folgenden mit E_{ret}^V bzw. E_{av}^V bezeichnen wollen, wählen wir, da ein Inverses von $(\square + V(t)\delta(x))$ Gleichung (4.15) erfüllt, folgenden Ansatz:

Wir entwickeln $(\square + V(t)\delta(x))^{-1}$ in eine geometrische Reihe um E_{ret}^V und E_{av}^V zu bestimmen. Anschließend überprüfen wir, ob es sich bei E_{ret}^V und E_{av}^V tatsächlich um eine Fundamentallösung der Feldgleichung (4.8) handelt.

Zu beachten ist, dass der Ausdruck $(\square + V(t)\delta(x))$ aufgrund der Delta-Funktion nicht wohldefiniert ist. Es soll also an dieser Stelle zunächst *formal* die Reihe entwickelt werden. Die

geometrische Reihe für $(\square + V(t)\delta(x))^{-1}$ lautet

$$\begin{aligned} (\square + V(t)\delta(x))^{-1} &= \square^{-1} \left(1 + V(t)\delta(x)\square^{-1} \right)^{-1} \\ &= \square^{-1} \left(\frac{1}{1 - (-V(t)\delta(x)\square^{-1})} \right) \\ &= \square^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (V(t)\delta(x)\square^{-1})^n \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dabei wurde von der zweiten auf die dritte Zeile der Ausdruck in der Klammer durch die geometrische Reihe ersetzt. Außerdem ersetzen wir \square^{-1} durch $E_{ret}^0(t, x, t', x')$ bzw. $E_{av}^0(t, x, t', x')$, was in Behauptung 4.3.1 und anschließender Bemerkung begründet wird.

Es ergibt sich somit für die geometrische Reihe folgender Ausdruck:

$$E_{ret/av}^V(t, x, t', x') = E_{ret/av}^0(t, x, t', x') \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (V(t)\delta(x)E_{ret/av}^0(t, x, t', x'))^n \right). \quad (4.17)$$

Im Folgenden wird nun die rechte Seite der Gleichung (4.17) zur Bestimmung der retardierten Lösung $E_{ret}^V(t, x, t', x')$ unter Verwendung von $E_{ret}^0(t, x, t', x') = \Theta(u-u')\Theta(v-v')$ ausgewertet. Anschließend soll die avancierte Lösung $E_{av}^V(t, x, t', x')$ mit $E_{av}^0(t, x, t', x') = \Theta(u'-u)\Theta(v'-v)$ bestimmt werden. Die kausale Fundamentallösung für die homogene Wellengleichung ergibt sich aus der Differenz, also $E^V(t, x, t', x') = E_{ret}^V(t, x, t', x') - E_{av}^V(t, x, t', x')$.

Entwicklung der rechten Seite von Gleichung (4.17) und Integration über die möglichen zeitartigen Wege (vgl. Abbildung 4.1) liefert

$$\begin{aligned} E_{ret}^V(t, x, t', x') &= E_{ret}^0(t, x, t', x') - \int dt_1 dx_1 V(t_1)\delta(x_1)E_{ret}^0(t, x, t_1, x_1)E_{ret}^0(t_1, x_1, t', x') \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \int dt_1 \dots dt_n dx_1 \dots dx_n V(t_1) \dots V(t_n) \delta(x_1) \dots \delta(x_n) \times \\ &\quad \quad \quad E_{ret}^0(t, x, t_1, x_1)E_{ret}^0(t_1, x_1, t_2, x_2) \dots E_{ret}^0(t_n, x_n, t', x'). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die Funktionen $E_{ret}^0(, , ,)$ stellen Einschränkungen an die Integrationsgrenzen von (4.18). Diese lassen sich leicht mit $E_{ret}^0(t, x, t', x') = \Theta(t - t' - |x - x'|)$ berechnen, wobei $\Theta(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$ ist.¹ Die Integrationsvariablen $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$ werden nicht beschränkt, der Integrationsbereich der x_i geht somit über ganz \mathbb{R} . Führen wir die Integration über $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$ aus, so werden aufgrund der δ -Funktionen alle $x_i = 0$. Die Integrationsvariablen $t_i, i \in \{2, \dots, n\}$ der geometrischen Reihe (4.18) unterliegen deshalb den Einschränkungen

$$t' + |x'| \leq t_n \leq \dots t_i \leq t_{i-1} \dots \leq t_1 \leq t - |x| \quad \text{für } i \in \{2, \dots, n\}. \quad (4.19)$$

¹Die genaue Definition der Theta-Funktion bei $x = 0$ ist unerheblich, da die Theta-Funktion im Sinne von Distributionen, und somit nur unter einem Integral, definiert ist. Deshalb unterscheiden sich unterschiedliche Definitionen nur um eine Nullmenge.

Es folgt für die geometrische Reihe aus (4.18) unter den Einschränkungen aus (4.19)

$$\begin{aligned}
E_{ret}^V(t, x, t', x') &= E_{ret}^0(t, x, t', x') - \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_1 V(t_1) E_{ret}^0(t, x, t_1, 0) E_{ret}^0(t_1, 0, t', x') \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_1 \dots \int_{t'+|x'|}^{t_{i-1}} dt_i \dots \int_{t'+|x'|}^{t_{n-1}} dt_n V(t_1) \dots V(t_i) \dots V(t_n) \times \\
&E_{ret}^0(t, x, t_1, 0) \dots E_{ret}^0(t_{i-1}, 0, t_i, 0) \dots E_{ret}^0(t_n, 0, t', x') ,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

oder unter Verwendung des Produkts

$$\begin{aligned}
E_{ret}^V(t, x, t', x') &= E_{ret}^0(t, x, t', x') - \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_1 V(t_1) E_{ret}^0(t, x, t_1, 0) E_{ret}^0(t_1, 0, t', x') \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_1 V(t_1) \prod_{i=2}^n \int_{t'+|x'|}^{t_{i-1}} dt_i V(t_i) E_{ret}^0(t, x, t_1, 0) E_{ret}^0(t_{i-1}, 0, t_i, 0) E_{ret}^0(t_n, 0, t', x') .
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Nach Einschränkung der Integrale auf die Grenzen aus (4.19) folgt für die Terme

$$E_{ret}^0(t, x, t_1, 0) E_{ret}^0(t_1, 0, t', x') = 1 \quad \text{für } n = 1 , \tag{4.22}$$

$$E_{ret}^0(t, x, t_1, 0) \prod_{i=2}^n E_{ret}^0(t_{i-1}, 0, t_i, 0) E_{ret}^0(t_n, 0, t', x') = 1 \quad \text{für } n \geq 2, \tag{4.23}$$

falls die obere Grenze $t - |x|$ immer größer gleich der unteren Grenze $t' + |x'|$ ist. Ist dies nicht der Fall, verschwinden die Ausdrücke (4.22) und (4.23). Wir können also in den Termen der geometrischen Reihe diese Ausdrücke ersetzen durch die Theta-Funktion $\Theta(t - t' - |x| - |x'|)$. Diese ist, wie die Terme (4.22) und (4.23) eins innerhalb der Integralgrenzen und null, falls $t - |x| < t' + |x'|$.

Damit läßt sich die Reihe wesentlich vereinfachen zu

$$\begin{aligned}
E_{ret}^V(t, x, t', x') &= E_{ret}^0(t, x, t', x') - \Theta(t - t' - |x| - |x'|) \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_1 V(t_1) \\
&+ \Theta(t - t' - |x| - |x'|) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_1 V(t_1) \prod_{i=2}^n \int_{t'+|x'|}^{t_{i-1}} dt_i V(t_i) .
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Eine Abänderung der oberen Integrationsgrenzen t_{i-1} für alle $i \in \{2, ..n\}$ bis zur oberen Grenze $t - |x|$ führt zum Überabzählen. Deshalb wird der Korrekturfaktor $\frac{1}{n!}$ im n -ten Term der Reihe ergänzt. Die geometrische Reihe nimmt schließlich folgende Form an

$$\begin{aligned}
E_{ret}^V(t, x, t', x') &= E_{ret}^0(t, x, t', x') - \Theta(t - t' - |x| - |x'|) \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_1 V(t_1) \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Theta(t - t' - |x| - |x'|) \prod_{i=1}^n \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_i V(t_i) ,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

wobei zu beachten ist, dass im dritten Term das Produkt nun von 1 bis n läuft. Der zweite Term ist bereits im dritten Term enthalten, wenn die Summe bereits bei $i = 1$ beginnt, wir

summieren also von $i = 1, \dots, n$. Wir wollen die Reihe als Exponentialreihe aufschreiben,

$$E_{ret}^V(t, x, t', x') = E_{ret}^0(t, x, t', x') + \Theta(t - t' - |x| - |x'|) \left(-1 + \underbrace{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{i=1}^n \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_i V(t_i)}_J \right). \quad (4.26)$$

J kann zusammengefasst werden zu einer Exponentialreihe, womit sich die geometrische Reihe schließlich schreiben läßt als

$$E_{ret}^V(t, x, t', x') = E_{ret}^0(t, x, t', x') + \Theta(t - t' - |x| - |x'|) \left(e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} d''V(t'')} - 1 \right). \quad (4.27)$$

Die avancierte Fundamentallösung läßt sich aus der retardierten Fundamentallösung ableiten, indem man in die retardierte die inversen Lichtkegelkoordinaten einsetzt. Dadurch gelten auch für die t_i die umgekehrten Verhältnisse verglichen mit (4.19). Insbesondere gilt für die obere und untere Grenze $t' - |x'| \geq t + |x|$. Da sich die avancierte und die retardierte Fundamentallösung nur um das Inverse der Lichtkegelkoordinaten unterscheiden, kann aus (4.27) leicht die avancierte Lösung bestimmt werden, indem man die obere und untere Integrationsgrenze vertauscht. Entsprechende Vertauschungen muss auch für die Theta-Funktion durchgeführt werden, die auch hier dafür sorgt, dass die obere Integrationsgrenze immer größer als die untere ist. Es folgt

$$E_{av}^V(t, x, t', x') = E_{av}^0(t, x, t', x') + \Theta(t' - t - |x'| - |x|) \left(e^{-\int_{t+|x|}^{t'-|x'|} d''V(t'')} - 1 \right). \quad (4.28)$$

Die kausale Fundamentallösung ist, wie bereits oben erwähnt, die Differenz der retardierten und der avancierten Fundamentallösung, kann also leicht angegeben werden mit

$$E^V(t, x, t', x') = E_{ret}^0(t, x, t', x') + \Theta(t - t' - |x| - |x'|) \left(e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} d''V(t'')} - 1 \right) - E_{av}^0(t, x, t', x') - \Theta(t' - t - |x'| - |x|) \left(e^{-\int_{t+|x|}^{t'-|x'|} d''V(t'')} - 1 \right). \quad (4.29)$$

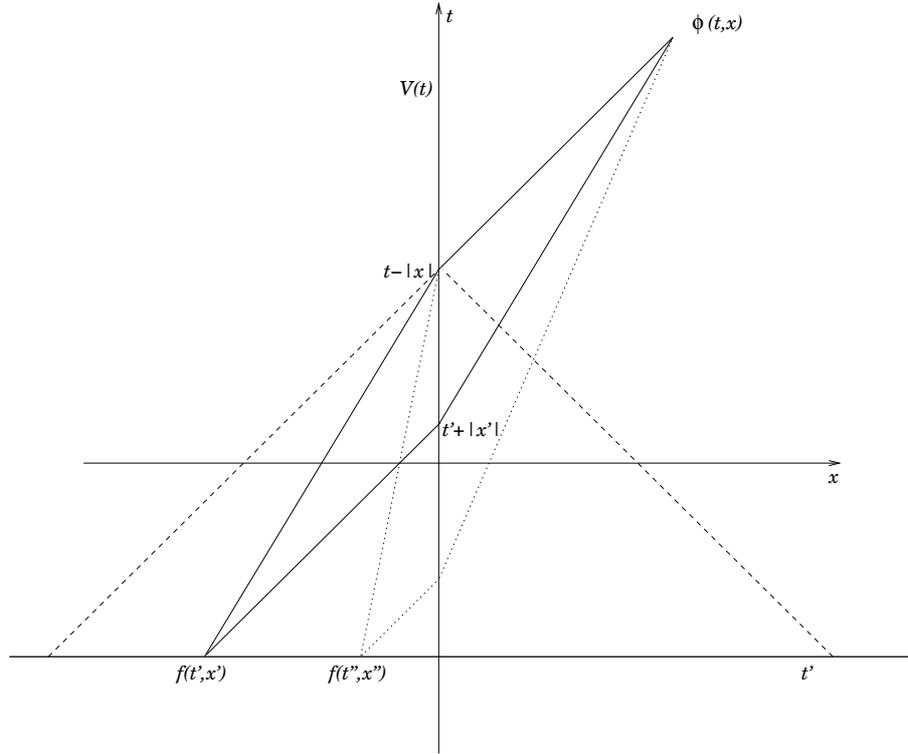


Abbildung 4.1: Aus Kausalitätsgründen werden die Integrationsgrenzen der geometrischen Reihe in erster Ordnung auf $t - |x|$ und $t' + |x'|$ eingeschränkt.

Wie wir bereits zu Beginn des Abschnittes 4.3.2 deutlich gemacht haben, ist die Entwicklung des Ausdrucks $(\square + V(t)\delta(x))^{-1}$ in eine geometrische Reihe nur ein Ansatz, d.h. es ist keinesfalls gewährleistet, dass diese Reihenentwicklung tatsächlich eine Fundamentallösung der Feldgleichung (4.8) darstellt. Dass die oben hergeleitete geometrische Reihe wirklich eine kausale Fundamentallösung ist, begründet folgende Behauptung:

Proposition 4.3.2. Sei $(\square + V(t)\delta(x))\phi(x, t) = 0$ die Feldgleichung mit $\phi \in \mathcal{C}^2, V \in \mathcal{C}^1$. Der retardierte Propagator

$$E_{ret}^V(t, x, t', x') = E_{ret}^0(t, x, t', x') + \Theta(t - t' - |x| - |x'|) \begin{pmatrix} - \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} d''V(t'') \\ e^{t'+|x'|} & -1 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

ist eine Fundamentallösung der Feldgleichung, und der avancierte Propagator

$$E_{av}^V(t, x, t', x') = E_{av}^0(t, x, t', x') + \Theta(t' - t - |x'| - |x|) \begin{pmatrix} - \int_{t+|x|}^{t'-|x'|} d''V(t'') \\ e^{t+|x|} & -1 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

ist ebenfalls eine Fundamentallösung.

Beweis. Der Propagator E_{ret}^V , der die Testfunktionen $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})$ auf Funktionen $\Phi = E_{ret}^V f \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ mit $\text{supp}(E_{ret}^V f) \subset J^+(\text{supp } f)$ abbildet, zeigt kausales Verhalten. Das ist für $E_{ret}^0(t, x, t', x') = \Theta(t - t' - |x - x'|)$ offensichtlich, da wegen $\Theta(t - t' - |x - x'|) = 1 \Leftrightarrow$

$t - t' \geq |x - x'|$ nur kausale Verbindungen zwischen (t', x') und (t, x) zugelassen sind. Wegen der Ungleichung $|x| + |x'| \geq |x - x'| \forall x, x' \in \mathbb{R}$ erfüllt der zweite Term aus (4.30) automatisch das gewünschte kausale Verhalten. Analoges gilt auch für (4.31).

Für den Fall $V = 0$ folgt die freie Wellengleichung. Nach Gleichung (4.14) gilt $E_{ret}^0(t, x, t', x') = \Theta(u - u')\Theta(v - v')$. Wie im Beweis zu Behauptung 4.3.1 wenden wir $\square_{(u,v)}$ auf $E_{ret}^0(t, x, t', x')$ an, also

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} E_{ret}^0(t, x, t', x') = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \Theta(u - u')\Theta(v - v') = \delta(u - u')\delta(v - v') . \quad (4.32)$$

Wir setzen die ursprünglichen Koordinaten t und x wieder ein und erhalten für das Produkt der δ -Funktionen

$$\delta(u - u')\delta(v - v') = \delta(t - t' - x + x')\delta(t - t' + x - x') = \delta(t - t')\delta(x - x') . \quad (4.33)$$

Es müssen wegen des mittleren Ausdrucks in (4.33) die beiden Gleichungen $t - t' = x - x'$ und $t - t' = -x + x'$ erfüllt sein, damit das Integral, unter dem die Delta-Funktionen aufgrund der Definition als Distribution stehen, nicht verschwindet. Einsetzen der ersten in die zweite Gleichung zur Berechnung von $t - t'$ oder $x - x'$ liefert die beiden Gleichungen $t = t'$ und $x = x'$, die ebenfalls gleichzeitig gelten sollen, was sich nun als $\delta(t - t')\delta(x - x')$ ausdrücken läßt.

Die in Lemma (4.3.1) bewiesene Identität soll dazu dienen, aus der Exponentialreihe den Term mit der t - und x -Abhängigkeit abzuspalten. Dadurch kann die Rechnung wesentlich vereinfacht werden.

Lemma 4.3.1. Es gilt folgende Identität:

$$e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} d''V(t'')} - 1 = - \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_1 V(t_1) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t_1} d''V(t'')} . \quad (4.34)$$

Beweis. Wir schreiben die Reihe um, gehen einen Schritt in umgekehrter Richtung im Vergleich zur Herleitung (vgl. (4.24) bis (4.26))

$$\begin{aligned} e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} d''V(t'')} - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{i=1}^n \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_i V(t_i) \\ &= - \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_1 V(t_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{i=2}^n \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_i V(t_i) \\ &= - \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_1 V(t_1) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_1 V(t_1) \int_{t'+|x'|}^{t_1} dt_2 V(t_2) \dots \int_{t'+|x'|}^{t_{n-1}} dt_n V(t_n) . \end{aligned} \quad (4.35)$$

Wir klammern von jedem Term der Summe (4.35) $(-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_1 V(t_1))$ aus, dadurch erreicht

man eine Abspaltung des Integral, das von t und x abhängt,

$$\begin{aligned}
e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} d''V(t'')} - 1 &= - \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_1 V(t_1) \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \int_{t'+|x'|}^{t_1} dt_2 V(t_2) \dots \int_{t'+|x'|}^{t_{n-1}} dt_n V(t_n) \right) \\
&= - \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_1 V(t_1) \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_{t'+|x'|}^{t_1} dt_2 V(t_2) \dots \int_{t'+|x'|}^{t_1} dt_n V(t_n) \right) \\
&= - \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_1 V(t_1) \left(1 + \sum_{\tilde{n}=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\tilde{n}}}{(\tilde{n})!} \int_{t'+|x'|}^{t_1} dt_2 V(t_2) \dots \int_{t'+|x'|}^{t_1} dt_{\tilde{n}+1} V(t_{\tilde{n}+1}) \right), \quad (4.36)
\end{aligned}$$

wobei wir \tilde{n} durch $n-1$ ersetzt haben. Beim Ausdruck in der Klammer in (4.36) handelt es sich wieder um eine Exponentialreihe, jetzt allerdings mit oberer Grenze t_1 im Integral. Somit ist die Behauptung bewiesen. \square

Aufgrund von Lemma (4.3.1) können wir den retardierten Propagator (4.30) schreiben als

$$\begin{aligned}
E_{ret}^V(t, x, t', x') &= \Theta(t - t' - |x - x'|) - \Theta(t - t' - |x| - |x'|) \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_1 V(t_1) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t_1} d''V(t'')} \\
&= \Theta(t - t' - |x - x'|) - \int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt_1 \Theta(t - |x| - t_1) V(t_1) \underbrace{e^{-\int_{t'+|x'|}^{t_1} d''V(t'')}}_J \Theta(t_1 - t' - |x'|). \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Der Ausdruck kann so umgeschrieben werden, da die Theta-Funktionen in beiden Fällen in den selben Intervallen 1 bzw. 0 sind. Der Vorteil des letzten Ausdrucks ist allerdings, dass man die Grenzen des Intervalls über t_1 nun von $]-\infty, \infty[$ ausdehnen kann, da wegen der Theta-Funktionen der Integrand außerhalb des Intervalls $[t' + |x'|, t - |x|]$ zu null wird. Das Integral geht über ganz \mathbb{R} . Außerdem gilt für J

$$\begin{aligned}
E_{ret}^V(t_1, 0, t', x') &= \Theta(t_1 - t' - |x'|) + \Theta(t_1 - t' - |x'|) \left(e^{-\int_{t'+|x'|}^{t_1} d''V(t'')} - 1 \right) \\
&= \Theta(t_1 - t' - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t_1} d''V(t'')} . \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Aus Gleichung (4.37) folgt nun für die Fundamentallösung unter Verwendung von $E_{ret}^0(t, x, t_1, 0) = \Theta(t - |x| - t_1)$

$$E_{ret}^V(t, x, t', x') = E_{ret}^0(t, x, t', x') - \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 E_{ret}^0(t, x, t_1, 0) V(t_1) E_{ret}^V(t_1, 0, t', x') . \quad (4.39)$$

Wenden wir nun den Differentialoperator \square der freien Wellengleichung auf $E_{ret}^V(t, x, t', x')$ an:

$$\square E_{ret}^V(t, x, t', x') = \square E_{ret}^0(t, x, t', x') - \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \square E_{ret}^0(t, x, t_1, 0) V(t_1) E_{ret}^V(t_1, 0, t', x') \quad (4.40)$$

$$= \delta(t - t') \delta(x - x') - \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \delta(t - t_1) \delta(x - 0) V(t_1) E_{ret}^V(t_1, 0, t', x') \quad (4.41)$$

$$= \delta(t - t') \delta(x - x') - \delta(x) V(t) E_{ret}^V(t, x, t', x'), \quad (4.42)$$

wobei wir in (4.40) Gleichungen (4.32) und (4.33) verwendet haben. Es gilt $\delta(x - 0) \Rightarrow x = 0$. Deshalb kann im letzten Term 0 durch x ersetzt werden. Es folgt

$$(\square + \delta(x) V(t)) E_{ret}^V(t, x, t', x') = \delta(t - t') \delta(x - x'), \quad (4.43)$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Da sich der avancierte Propagator (4.31), wie oben bereits erwähnt, nur um das Inverse der Lichtkegelkoordinaten unterscheidet, läuft der Beweis, dass es sich dabei ebenfalls um eine Fundamentallösung handelt, analog ab. \square

4.4 Berechnung des klassischen Energie-Impuls-Tensors

Es soll der Energie-Impuls-Tensor für ein Feld ϕ bestimmt werden, der sich aus den Anfangsdaten und der oben berechneten Fundamentallösung $E_{ret/av}^V(t, x, t', x')$ berechnen lässt. Es soll im ersten Abschnitt die allgemeine Herleitung für $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ und $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ dargestellt werden. Im zweiten Abschnitt berechnen wir den Energie-Impuls-Tensor für die Theorie, beschrieben durch die Lagrangedichte (4.1). Wir können daraus ablesen, welchen Eigenschaften das Feld ϕ und das singuläre Potential $V(t)\delta(x)$ genügen müssen. Wie wir sehen werden, ist ein wesentlicher Bestandteil zur Berechnung der Divergenz des Energie-Impuls-Tensors die Existenz der zweiten Ableitungen nach t und x sowie das Vertauschen der partiellen Ableitungen. Diese Forderungen scheinen trivial, es kann aber a priori keine Aussage gemacht werden über das genaue Verhalten der Felder $\phi = \iint dx' dt' E_{ret}^V(t, x, t', x') f(t', x')$, $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{M})$, wobei wir die oben bestimmte Fundamentallösung der Feldgleichung mit singulärem Potential verwendet haben. Die Existenz der zweiten Ableitungen und der Vertauschbarkeit beweisen wir durch Ausrechnen in Anhang A.

4.4.1 Energie-Impuls-Tensor im allgemeinen Fall

Der Energie-Impuls-Tensor für eine Feldgleichung der Form $(\square + V)\phi = 0$ lautet

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\rho \phi \partial^\rho \phi - V \phi^2), \quad (4.44)$$

wobei die Indizes die Werte $\mu, \nu \in \{0, \dots, 3\}$ annehmen, und $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ gilt.² Wir rufen uns zunächst die Bedeutung der einzelnen Einträge des Energie-Impuls-Tensors $T_{\mu\nu}$ in Erinnerung.

- (i) Die rein zeitliche Komponente T_{00} entspricht der Energiedichte des Feldes.

²Der Energie-Impuls-Tensor ergibt sich aus der Variation der Wirkung nach der Metrik: $T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$, wobei $\det g_{\mu\nu} = g$.

- (ii) Die gemischten Komponenten $T_{0i} = T_{i0}$, für $i \in \{1, \dots, 3\}$ entsprechen den Energiestromdichten.
- (iii) Die rein räumlichen Anteile entsprechen den Impulsstromdichten.

Im Besonderen wird uns bei der Untersuchung unseres Modells das Verhalten der Energie am Ursprung interessieren. Zur Berechnung des Energieverhaltens bestimmen wir deshalb die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = \partial^0 T_{0\nu} + \partial^1 T_{1\nu} \quad \text{mit} \quad \nu \in \{0, 1\}. \quad (4.45)$$

$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ ist das Energie-Impuls-Erhaltungsgesetz in flacher Raumzeit. Wir wollen entsprechend unserem Beispiel den zweidimensionalen Fall betrachten. Die nullte Komponente soll die Zeitkoordinate t , die erste die Ortskoordinate x beschreiben. Konkret ergibt sich somit für die T_{00} -Komponente mit der Metrik $g_{ab} = (1, -1)$

$$\begin{aligned} T_{00} &= \partial_0 \phi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} g_{00} (\partial_0 \phi \partial^0 \phi + \partial_1 \phi \partial^1 \phi - V \phi^2) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_1 \phi)^2 + \frac{1}{2} V \phi^2, \end{aligned} \quad (4.46)$$

wobei obere Indizes mit Hilfe der Metrik nach unten gezogen werden. T_{00} beschreibt die Energiedichte. Der erste und zweite Term beschreiben den kinetischen, der letzte den potentiellen Anteil. Für die Ableitung der Energiedichte nach der Zeit t folgt

$$\partial_0 T_{00} = \partial_0 \phi \partial_0^2 \phi + \partial_1 \phi \partial_0 \partial_1 \phi + \frac{1}{2} \partial_0 V \phi^2 + V \phi \partial_0 \phi. \quad (4.47)$$

Für die T_{01} -Komponente und ihrer Ableitung ergibt sich

$$T_{01} = \partial_0 \phi \partial_1 \phi \quad \text{bzw.} \quad \partial_1 T_{01} = \partial_1 \partial_0 \phi \partial_1 \phi + \partial_0 \phi \partial_1^2 \phi. \quad (4.48)$$

Mit diesen Angaben berechnet sich die Divergenz zu

$$\partial^\mu T_{0\mu} = \partial^0 T_{00} + \partial^1 T_{01} = \partial_0 T_{00} - \partial_1 T_{01} \quad (4.49)$$

$$= \partial_0 \phi \partial_0^2 \phi + \partial_1 \phi \partial_0 \partial_1 \phi + \frac{1}{2} \partial_0 V \phi^2 + V \phi \partial_0 \phi - \partial_1 \partial_0 \phi \partial_1 \phi - \partial_0 \phi \partial_1^2 \phi \quad (4.50)$$

$$= \partial_0 \phi \partial_0^2 \phi - \partial_0 \phi \partial_1^2 \phi + V \phi \partial_0 \phi + \frac{1}{2} \partial_0 V \phi^2 \quad (4.51)$$

$$= \partial_0 \phi \underbrace{(\partial_0^2 \phi - \partial_1^2 \phi + V \phi)}_{(\square + V)\phi=0} + \frac{1}{2} \partial_0 V \phi^2 \quad (4.52)$$

$$= \frac{1}{2} \partial_0 V \phi^2. \quad (4.53)$$

Falls das Potential nicht von der Zeit abhängt, ist die Energie erhalten.

4.4.2 Energie-Impuls-Tensor des Modells

Um den Energie-Impuls-Tensor an obige Feldgleichung anzupassen, muss die glatte Funktion V durch den singulären Ausdruck $V(t)\delta(x)$ ersetzt werden. Da es sich bei diesem Ausdruck nicht um eine $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ Funktion handelt, kann obige allgemeine Rechnung, die für Potentiale

$V \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ allgemein gilt, nicht notwendigerweise angewendet werden. Im folgenden soll also durch eine analoge Rechnung gezeigt werden, dass der Energie-Impuls-Tensor sich wie obiger verhält, insbesondere die Energie bei zeitunabhängigem Potential erhalten ist.

Der Energie-Impuls-Tensor berechnet sich aus dem skalaren Feld und dessen erster und zweiter Ableitungen nach t und x . Dabei soll sich zur Überprüfung der Fundamentallösung E_{ret}^V das Feld $\phi(t, x)$ aus $\phi = \iint dx' dt' E_{ret}^V(t, x, t', x') f(t', x')$ berechnen. Somit wirken die Ableitungen auf E . Da es sich hierbei um eine Distribution handelt, muss diese auch im Sinne von Distributionen abgeleitet werden. Genauere Betrachtung zeigt, dass diese sich bei der Ableitung nach t wie ein Produkt einer Distribution und einer Funktion verhält, weshalb die Ableitung nach der Produktregel ausgeführt werden kann. Die Ableitung nach x wird ebenfalls nach der Produktregel und Kettenregel ausgeführt. Die Begründung, dass dies sinnvoll ist, wird im Anhang A gegeben.

Mit diesen Ableitungen wollen wir nun die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors ausrechnen, der für die Langrangedichte (4.1) die Form

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\rho \phi \partial^\rho \phi - V(t) \delta(x) \phi^2) \quad (4.54)$$

annimmt, wobei $g_{ab} = (1, -1)$ gilt. Der Energie-Impuls-Tensors unterscheidet sich von dem aus (4.44) nur um das singuläre Potential, da es aber keine allgemeine Theorie für solche Potentiale gibt, wollen wir die entsprechend notwendigen Abänderungen erwähnen und die Divergenz in diesem Fall berechnen. Für die Energie-Komponente T_{tt} gilt

$$T_{tt} = \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + \frac{1}{2} V(t) \delta(x) \phi^2 \quad (4.55)$$

und damit folgt die Ableitung

$$\partial_t T_{tt} = \partial_t \phi \partial_t^2 \phi + \partial_x \phi \partial_t \partial_x \phi + \frac{1}{2} \partial_t V(t) \delta(x) \phi^2 + V(t) \delta(x) \phi \partial_t \phi . \quad (4.56)$$

Für die T_{tx} -Komponente und deren Ableitung folgt

$$T_{tx} = \partial_t \phi \partial_x \phi \quad \text{bzw.} \quad \partial_x T_{tx} = \partial_x \partial_t \phi \partial_x \phi + \partial_t \phi \partial_x^2 \phi . \quad (4.57)$$

Wir sehen, dass in den Termen zur Berechnung der Divergenz maximal die zweiten Ableitungen der Felder nach den Koordinaten t und x auftreten. In Anhang A wird gezeigt, dass die zweiten Ableitungen existieren, also $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ und dass die partiellen Ableitungen vertauschen, d.h. $\partial_t \partial_x \phi = \partial_x \partial_t \phi$. Mit diesen Angaben berechnet sich die Divergenz analog zu (4.49)

$$\partial_t T_{tt} - \partial_x T_{tx} = \frac{1}{2} [\partial_t (V(t) \delta(x))] \phi^2 . \quad (4.58)$$

Hängt das Potential nicht von der Zeit ab, so fällt der Term in (4.58) weg, und es gilt Energieerhaltung. Ist das Potential, wie in unserem Fall, abhängig von der Zeit, so wird durch dessen Änderung, die von außen stattfindet, Energie in das System gesteckt. Die Energie des Systems verändert sich gemäß (4.58). Befindet sich das Feld weit weg von der Potentialbarriere, sodass V nicht in $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ liegt, wobei \mathcal{S} die Cauchyfläche darstellen soll und $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ den entsprechenden Doppelkegel, so wird das Feld ϕ nicht von V beeinflusst und es gilt Energieerhaltung wegen $\partial^\mu T_{\mu 0} = 0$.

Die Berechnung der Divergenz für $\partial^\mu T_{\mu 1}$, die völlig analog abläuft, liefert

$$\partial^\mu T_{\mu 1} = \frac{1}{2} [\partial_x (V(t) \delta(x))] \phi^2 . \quad (4.59)$$

4.4.3 Energieflußdichte des Modells

Aus dem Energie-Impuls-Tensor läßt sich auch die Energieflußdichte berechnen. Wir wollen überprüfen, wie sich der Energiefluß bei $x = 0$ verhält, und wie das äußere Potential $V(t)$, das genau bei $x = 0$ wirkt, diesen beeinflusst. Der Energiestrom wird mithilfe des Energie-Impuls-Tensors wie folgt berechnet [20]:

$$j_a = -T_{ab}v^b, \quad (4.60)$$

wobei v^b der Normalenvektor in x -Richtung sein soll. Wir geben $\vec{v} = (0, 1)(\vec{e}_t, \vec{e}_x)$ an und die Energiestromdichte j_x in x -Richtung berechnet sich mithilfe der ersten Ableitungen

$$j_x = -T_{00}v^0 - T_{01}v^1 = -\partial_t\phi\partial_x\phi. \quad (4.61)$$

Von Interesse ist nun die Differenz des auslaufenden und des einlaufenden Energiestroms bei $x = 0$ zur Untersuchung des Einflusses vom Potential $V(t)$. Deshalb berechnen wir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (j_x(t, \epsilon) - j_x(t, -\epsilon)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-\partial_t\phi(t, \epsilon)\partial_x\phi(t, \epsilon) + \partial_t\phi(t, -\epsilon)\partial_x\phi(t, -\epsilon)). \quad (4.62)$$

Im Anhang A finden wir die Ableitung des Feldes nach t und x . Der Strom ist also das negative des Produkts von (A.46) und (A.48), weshalb mit $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ und $V \in \mathcal{C}^1$

$$\begin{aligned} j_x = -\partial_t\phi\partial_x\phi = & \quad (4.63) \\ & - \left(\int dx' f(t - |x - x'|, x') - \iint dx' dt' f(t', x') V(t - |x|) \Theta(t - t' - |x| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} \right) \\ & \left(- \int dx' f(t - |x - x'|, x') \text{sign}(x - x') \right. \\ & \quad \left. + \text{sign}(x) \iint dx' dt' f(t', x') V(t - |x|) \Theta(t - t' - |x| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} \right) \end{aligned}$$

folgt. Der Ausdruck in der ersten Klammer von (4.63) entspricht der Ableitung des Feldes nach t , also $\partial_t\phi(t, x)$. Unabhängig davon, ob man sich von $x > 0$ oder $x < 0$ nähert, nimmt er denselben Grenzwert bei $x = 0$ an. Das Ergebnis des Grenzwertes $\epsilon \rightarrow 0$ ist nun unabhängig davon, ob wir den Grenzwert des gesamten obigen Ausdrucks bilden, oder nur die zweite Klammer betrachten, und den Ausdruck $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \partial_t\phi(t, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \partial_t\phi(t, -\epsilon) = \partial_t\phi(t, 0)$ ausklammern. Wir können durch Ausklammern den Ausdruck vereinfachen zu

$$\partial_t\phi(t, 0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-\partial_x\phi(t, \epsilon) + \partial_x\phi(t, -\epsilon)). \quad (4.64)$$

Der Ausdruck in der zweiten Klammer von (4.63) hängt wegen den Vorzeichenfunktionen $\text{sign}(x - x')$ bzw. $\text{sign}(x)$ von der Richtung der Annäherung ab, d.h. es ergeben sich unter-

schiedliche Grenzwerte bei Annäherung an 0,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-\partial_x \phi(t, \epsilon) + \partial_x \phi(t, -\epsilon)) = \quad (4.65)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int dx' f(t - |\epsilon - x'|, x') \text{sign}(\epsilon - x') - \int dx' f(t - |-\epsilon - x'|, x') \text{sign}(-\epsilon - x') \right) \quad (4.66)$$

$$- \text{sign}(\epsilon) \iint dx' dt' f(t', x') V(t - |\epsilon|) \Theta(t - t' - |\epsilon| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|\epsilon|} dt'' V(t'')} \quad (4.67)$$

$$+ \text{sign}(-\epsilon) \iint dx' dt' f(t', x') V(t - |-\epsilon|) \Theta(t - t' - |-\epsilon| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|-\epsilon|} dt'' V(t'')} \quad (4.68)$$

Die Terme in (4.66) verschwinden. Dafür betrachten wir zunächst den Fall $x' \neq 0$ und wählen $\epsilon > 0$. Wir spalten die Integrale bezüglich der Integration über x' auf und die Vorzeichenfunktionen nehmen somit sogar im Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ eindeutige Vorzeichen an,

$$\begin{aligned} &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-2\epsilon} dx' f(t - |\epsilon - x'|, x') \underbrace{\text{sign}(\epsilon - x')}_1 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{2\epsilon}^{\infty} dx' f(t - |\epsilon - x'|, x') \underbrace{\text{sign}(\epsilon - x')}_{-1} \\ &- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-2\epsilon} dx' f(t - |-\epsilon - x'|, x') \underbrace{\text{sign}(-\epsilon - x')}_1 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{2\epsilon}^{\infty} dx' f(t - |-\epsilon - x'|, x') \underbrace{\text{sign}(-\epsilon - x')}_{-1} . \end{aligned}$$

Die vier Terme heben sich weg. Auch bei $x' = 0$ fallen die Terme weg, da man in diesem Fall über eine Nullmenge integriert, und die Integrale verschwinden. Es folgt nach Ausführung des Grenzwertes

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-\partial_x \phi(t, \epsilon) + \partial_x \phi(t, -\epsilon)) &= -2 \iint dx' dt' f(t', x') V(t) \Theta(t - t' - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^t dt'' V(t'')} \\ &= -2\phi(t, 0)V(t), \end{aligned} \quad (4.69)$$

wobei wir Gleichung (4.38) und die Eigenschaft des retardierten Propagators $E_{ret}^0(t, 0, t', x')$ verwendet haben, die Funktion $f(t', x') \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ auf eine Lösung der Feldgleichung (4.8), $\phi(t, x)$, abzubilden, insbesondere gilt $\phi(t, 0) = \iint dx' dt' f(t', x') V(t) E_{ret}^0(t, 0, t', x')$. Zur Berechnung der Änderung der Energiestromdichte der Felder bei $x = 0$ setzen wir (4.69) in (4.64) ein und es folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (j_x(t, \epsilon) - j_x(t, -\epsilon)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-\partial_t \phi(t, 0) \partial_x \phi(t, \epsilon) + \partial_t \phi(t, 0) \partial_x \phi(t, -\epsilon)) \\ &= -2V(t) \phi(t, 0) \partial_t \phi(t, 0) . \end{aligned} \quad (4.70)$$

Wegen Gleichung (4.70) gilt für das Feld bei $x = 0$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(+\partial_x \phi(t, \epsilon) - \partial_x \phi(t, -\epsilon) - 2V(t) \phi(t, 0) \right) \partial_t \phi(t, 0) = 0 . \quad (4.71)$$

Gleichung (4.70) bzw. Gleichung (4.71) soll für alle skalaren Felder $\phi \in \mathcal{C}^2$ und deren zeitliche Ableitungen gelten, weshalb der Ausdruck in der Klammer verschwinden muss. Diese

Randbedingung, die Braunstein [14] für den Übergang der Felder bei $x = 0$ angegeben hat, ergibt sich bei unserem Zugang in natürlicher Weise aus der Betrachtung des Energieflusses am Ursprung.

Ebenfalls läßt sich aus der Gleichung ablesen, dass bei $V = 0$ der Energiestrom erhalten ist, wie das beim freien Feld der Fall ist. Ist $V \neq 0$, so ist der Energiefluß nicht erhalten. Das ist verständlich, da durch das Potential Energie in das System gesteckt wird (vgl. Abschnitt 4.4.2).

Ergebnis:

Die Fundamentallösung E^V aus Gleichung (4.29) und der klassische Energie-Impuls-Tensor (4.54), konstruiert aus Anfangswerten $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, die mit dem Propagator E^V fortgesetzt werden, sind also wohldefiniert. Wir konstruieren mit Hilfe dieser Fundamentallösung und \square^V in völliger Analogie zu Kapitel 2.2.3 die minimale Algebra \mathfrak{A} der Feldoperatoren einer freien Quantenfeldtheorie für unser Modell.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Zur Beschreibung von Raumzeiten mit Topologieänderungen eignen sich Kobordismen, auf denen eine Morse-Metrik definiert werden kann, besonders gut. Diese können in elementare Kobordismen zerlegt werden, wodurch sich die Untersuchung der kausalen Struktur auf die Untersuchung des Verhaltens der Kausalität in der Umgebung eines einzelnen Morse-Punktes vereinfacht. Das kausale Verhalten, insbesondere ist die kausale Stetigkeit von Interesse, wird dabei zum Teil durch den Morse-Index λ beschrieben. Die Definition von Quantenfeldern auf den elementaren Kobordismen erweist sich allerdings als schwierig. Bisher konnten nur in zwei Dimensionen alle elementaren Kobordismen, zum einen die Hose und zum anderen die Yarmulke, auf die Möglichkeit, ein wohldefiniertes Quantenfeld zu tragen, untersucht werden. Die Ergebnisse dieser Berechnungen stimmen zwar mit der Sorkin-Vermutung überein. Es fehlen allerdings Konstruktionen von Quantenfeldern auf elementaren Kobordismen höherer Dimension. Für die Hosentopologie gibt es mehrere verschiedene Ansätze, die allerdings zum selben Ergebnis, der Divergenz des Energie-Impuls-Tensors, führen.

Ausgehend von der Idee, dass die instantane Topologieänderung der unterliegenden Mannigfaltigkeit, auf der die Quantenfelder leben, Ausgangspunkt für die Divergenz des Energie-Impuls-Tensor sein könnte, gibt es Modelle, die eine Topologieänderung simulieren. Kontinuierlich veränderliche Randbedingungen werden dabei an die Felder gestellt, wobei die Struktur der unterliegenden Mannigfaltigkeit unverändert bleibt. Solch ein Modell wird durch die Langranggedichte (4.1) beschrieben. Wie mit dem singulären Potential umzugehen ist, bleibt zunächst unklar.

Die Anwendung der Theorie für hyperbolische Differentialgleichungen zur Lösung des Cauchy-Problems kann nur als Vorlage dienen, da $(\square + V(t)\delta(x))$ wegen der Delta-Funktion keinen Differentialoperator ist. Der Ansatz, ein Inverses von $(\square + V(t)\delta(x))$ mithilfe der geometrischen Reihe zu entwickeln lieferte eine Fundamentallösung für die Feldgleichung (4.8). Der klassische Energie-Impuls-Tensor unseres Modells hat nicht nur analoge Form (der Unterschied besteht im singulären Potential), sondern verhält sich auch wie der Energie-Impuls-Tensors des Klein-Gordon-Feldes. Dies folgt aus der Existenz der ersten beiden Ableitungen. Es konnte gezeigt werden, dass sich die Fundamentallösung bezüglich der ersten und zweiten Ableitungen nach t und x wie gewöhnliche Funktionen behandeln lassen, insbesondere dass die zweiten Ableitungen existieren. Aus der Berechnung der Energiestromdichte kann das Verhalten des Feldes bei $x = 0$ abgelesen werden. Die Änderung des Feldes in x -Richtung hat genau am Nullpunkt

einen Sprung, der proportional zum Feld und zum Potential ist. Das Aufstellen der Algebra wird nach der in Kapitel 2.2.3 beschriebenen Methode durchgeführt. Im Rahmen dieser Arbeit konnten leider keine weiteren Untersuchungen bezüglich der Zustände gemacht werden.

Als nächsten Schritt in Richtung einer vollständigen Quantenfeldtheorie für unser Modell ist zu untersuchen, ob Zustände auf der Algebra der Observablen definiert werden können. Wie diese Zustände aussehen und ob es Hadamard-Zustände gibt, kann wegen dem singulären Verhalten des Potentials nicht vorausgesagt werden und Bedarf einer genaueren Untersuchung. Falls positive normierte Zustände existieren ist der nächste zentrale Punkt die Untersuchung des quantisierten Energie-Impuls-Tensors.

Vielleicht gewinnt man durch die Untersuchung von kontinuierlichen Topologieänderungen tiefere Einsichten in die Strukturen quantisierter Felder auf solchen Raumzeiten und neue Erkenntnisse bezüglich der Quantenfelder auf elementaren Kobordismen. Untersuchungen von Raumzeiten mit Topologieänderungen mit der algebraischen Methode könnten Aufschluss über die Sorkin Vermutung geben, da man sich verschiedene Zustände zu der Operatoralgebra und die entsprechende Darstellung auf verschiedenen Hilberträumen anschauen kann. Zusammen mit der Erkenntnis, dass Kobordismen zerlegt werden können und dem Verständnis Quantenfeldtheorien auf beliebigen elementaren Kobordismen zu definieren, könnte man die Vielzahl verschiedener Topologieänderungen beherrschen und darauf Quantenfelder konstruieren. Das könnte ein wichtiger Beitrag zur Formulierung einer Theorie der Quantengravitation sein.

Anhang A

Ableitungen

Zur Herleitung der Feldgleichungen in Kapitel 4.2 und zur Berechnung des klassischen Energie-Impuls-Tensors in Kapitel 4.4 benötigen wir die ersten und zweiten Ableitungen des Feldes $\phi(t, x)$ nach den beiden Variablen $t, x \in \mathbb{R}$. Um das Verhalten des retardierten bzw. avancierten Propagators E_{ret}^V bzw. E_{av}^V aus Kapitel 4.3.2 zu untersuchen, sollen die Felder die Form $\phi(t, x) = \iint dx' dt' f(t', x') E_{ret/av}^V(t, x, t', x')$ haben. Die Ableitungen nach t bzw. x wirken somit auf die Fundamentallösungen. Diese müssen allerdings, da sie Distributionen darstellen, auch im Sinne von Distributionen abgeleitet werden. Wir wollen im nächsten Abschnitt A.1 formale Rechenregeln zur Ableitung der Propagatoren aufstellen. In Abschnitt A.2 werden wir explizit die Ableitungen berechnen.

A.1 Ableitungen im Sinne von Distributionen

Beim retardierten und avancierten Propagator aus Kapitel 4.3.2 handelt es sich um Distributionen. Diese müssen im Sinne von Distribution abgeleitet werden. Wir bestimmen formale Produkt- und Kettenregeln für die Propagatoren.

Definition A.1.1. \mathcal{T} sei ein linearer topologischer Funktionenraum, er heiße *Raum der Testfunktionen*. Der zu \mathcal{T} topologisch duale Raum, d.h. die Menge der stetigen linearen Funktionale über \mathcal{T} , heißt der *Raum der Distributionen* über \mathcal{T} .

Beim Dualraum, den wir mit \mathcal{T}' bezeichnen wollen, handelt es sich wieder um einen linearen Raum [34]. Distributionen sind somit lineare Funktionale auf dem Raum der Testfunktionen. Wir betrachten als Funktionenraum den Raum der glatten Testfunktionen mit kompaktem Träger, $\mathcal{T} = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Die Ableitung von Distributionen wird durch eine Art ‘‘Überwälzen‘‘ der Ableitung auf die Testfunktion definiert.

Definition A.1.2. Die Ableitung T' einer Distribution $T \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ ist gegeben durch

$$T'(f) := -T(f') \quad \forall f \in \mathcal{T} . \tag{A.1}$$

Ableitungen von Distributionen entsprechend Definition A.1.2 bezeichnet man als *Ableitung im Sinne von Distributionen* oder auch als *schwache Ableitung*.

Mit Hilfe von Definition A.1.2 wollen wir die schwachen Ableitungen des retardierten und avancierten Propagators,

$$E_{ret}^V(t, x, t', x') = \Theta(t - t' - |x - x'|) + \Theta(t - t' - |x| - |x'|) \left(e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} d''V(t'')} - 1 \right), \quad (\text{A.2})$$

$$E_{av}^V(t, x, t', x') = \Theta(t' - t - |x - x'|) + \Theta(t' - t - |x| - |x'|) \left(e^{-\int_{t+|x|}^{t'-|x'|} d''V(t'')} - 1 \right) \quad (\text{A.3})$$

berechnen, die nochmal zur Erinnerung angegeben werden.

Bezüglich der Ableitungen der Fundamentallösung nach ∂_t und ∂_t^2 können jeweils die ersten Terme aus (A.2) und (A.3) wie das bekannte Problem der Ableitung einer Theta-Funktion behandelt werden, wobei $\partial_t \Theta(t) = \delta(t)$ im Sinne von Distributionen gilt. Die jeweils zweiten Terme fassen wir als Produkt einer Distribution mit einer gewöhnlichen Funktion auf und verwenden die Produkt- und Kettenregel.

Die gilt nicht notwendigerweise für die Ableitungen ∂_x und ∂_x^2 . Bei diesen Ableitungen entstehen wegen den Betrags-Funktionen Signum-Funktionen. Aufgrund dieser zusätzlichen Distributionen können keine allgemeinen Aussagen über die Ableitungen von (A.2) bzw. (A.3) getroffen werden. Deshalb berechnen wir im Folgenden für den retardierten und avancierten Propagator die schwachen Ableitungen und fassen diese in Rechenregeln zusammen. Beginnen wir mit der Berechnung der schwachen Ableitung des ersten Terms von E_{ret}^V . Daraus ergibt sich folgende Proposition.

Proposition A.1.1. Für die Ableitung ∂_x der Theta-Distribution $\Theta(t - t' - |x - x'|)$ gilt folgende formale Rechenregel

$$\partial_x \Theta(t - t' - |x - x'|) = -\delta(t - t' - |x - x'|) \text{sign}(x - x'). \quad (\text{A.4})$$

Beweis. Wir berechnen die Ableitung im Sinne von Distributionen nach Definition A.1.2, indem wir die Testfunktion $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ableiten,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) \partial_x \Theta(t - t' - |x - x'|) &= - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx (\partial_x f(t, x)) \Theta(t - t' - |x - x'|) \\ &= - \int_{-t'}^{\infty} dt \int_{t'-t+x'}^{t-t'+x'} dx \partial_x f(t, x) \\ &= - \int_{-t'}^{\infty} dt [f(t, t - t' + x') + f(t, t' - t + x')] . \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

Bei der Berechnung der linken Seite versuchen wir, formal die Kettenregel anzuwenden,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) \partial_x \Theta(t - t' - |x - x'|) &= - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) \delta(t - t' - |x - x'|) \text{sign}(x - x') \\ &= - \int_{-x'}^{\infty} dx f(t' + x - x', x) + \int_{-\infty}^{x'} dx f(t' - x + x', x) . \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

Mit der Substitution $t = t' + x - x'$ im ersten Term und $t = -(t' - x + x')$ im zweiten Term von A.6, ergibt die formale Rechnung ebenfalls den Ausdruck A.5. Damit folgt die Behauptung. \square

Analog berechnen wir die schwache Ableitung des zweiten Terms vom retardierten Propagators aus (A.2), womit wir folgende Proposition zeigen können.

Proposition A.1.2. Es gilt folgende formale Rechenregel für die Ableitung nach x

$$\begin{aligned} \partial_x [\Theta(t - t' - |x| - |x'|) (e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} d''V(t'')} - 1)] = \\ - \text{sign}(x) \delta(t - t' - |x| - |x'|) (e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} d''V(t'')} - 1) \\ + \text{sign}(x) V(t - |x|) \Theta(t - t' - |x| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} d''V(t'')} . \end{aligned}$$

Beweis. Die Berechnung der schwachen Ableitung wird auch hier durch Abwälzen auf eine Testfunktion $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ durchgeführt. Dadurch wird formal eine Produkt- und Kettenregel für den retardierten Propagator eingeführt,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) \partial_x \left(\Theta(t - t' - |x| - |x'|) (e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} d''V(t'')} - 1) \right) \quad (\text{A.7})$$

$$= + \int_{-t'}^{\infty} dt \int_{t'-t+|x'|}^{t-t'-|x'|} dx \partial_x f(t, x) - \int_{-t'}^{\infty} dt \int_{t'-t+|x'|}^{t-t'-|x'|} dx (\partial_x f(t, x)) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} d''V(t'')} \quad (\text{A.8})$$

$$= \int_{-t'}^{\infty} dt (f(t, t - t' - |x'|) - f(t, t - t' - |x'|)) - \int_{-t'}^{\infty} dt f(t, x) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} d''V(t'')} \Big|_{-(t-t'-|x'|)}^{t-t'-|x'|} \quad (\text{A.9})$$

$$+ \int_{-t'}^{\infty} dt \int_{t'-t+|x'|}^{t-t'-|x'|} dx f(t, x) \text{sign}(x) V(t - |x|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} d''V(t'')} . \quad (\text{A.10})$$

Dabei haben wir das zweite Integral in Zeile A.8 mit partieller Integration umgeformt. Die ersten beiden Terme in Zeile A.9 heben sich gegenseitig weg.

Auf der linken Seite der Gleichung (A.7) wird formal nach der Produkt- und Kettenregel

abgeleitet,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) \partial_x \left(\Theta(t - t' - |x| - |x'|) \left(e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} d''V(t'')} - 1 \right) \right) \quad (\text{A.11})$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) \text{sign}(x) \delta(t - t' - |x| - |x'|) \left(e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} d''V(t'')} - 1 \right) \quad (\text{A.12})$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) \text{sign}(x) V(t - |x|) \Theta(t - t' - |x| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} d''V(t'')} . \quad (\text{A.13})$$

Bei Ausführung der Integration über t in Zeile A.12 wird dieser Term zu null. Die Theta-Funktion in Zeile A.13 schränkt die Integrationsvariablen auf die gleichen Grenzen wie in Term A.10 ein. Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

An dieser Stelle wollen wir auf ein Ergebnis aus dem nächsten Abschnitt vorgreifen. Wir wollen die Berechnung der Ableitungsregeln und die tatsächlichen Rechnungen der Übersichtlichkeit halber nicht vermengen. Die Berechnung der ersten Ableitung der Propagatoren nach x ergibt entsprechend (A.48)

$$\partial_x \phi(t, x) = - \int dx' \psi(t - |x - x'|, x') \text{sign}(x - x') \quad (\text{A.14})$$

$$+ \int dx' \int dt' \psi(t', x') \text{sign}(x) V(t - |x|) \Theta(t - t' - |x| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} . \quad (\text{A.15})$$

mit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Wie bereits in der Einleitung zu diesem Kapitel erwähnt, sind, wegen der Ableitung der Betrags-Funktionen nach x , Signum-Funktionen entstanden. Zur Berechnung der zweiten Ableitung nach x müssen wir deshalb die Integranden in A.14 und A.15 wieder im Sinne von Distributionen ableiten.

Proposition A.1.3. Die formale Ableitung des Integranden aus A.14 berechnet sich nach folgender Regel:

$$\partial_x [\psi(t - |x - x'|, x') \text{sign}(x - x')] = -\psi'(t - |x - x'|, x') + 2\psi(t - |x - x'|, x') \delta(x - x') .$$

Beweis. Berechnen wir wieder die Ableitung durch Abwälzen dieser auf die Testfunktion

$f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) \partial_x (\psi(t - |x - x'|, x') \text{sign}(x - x')) \quad (\text{A.16})$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx (\partial_x f(t, x)) \psi(t - |x - x'|, x') \text{sign}(x - x') \quad (\text{A.17})$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{x'}^{\infty} dx (\partial_x f(t, x)) \psi(t - x + x', x') + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{x'} dx (\partial_x f(t, x)) \psi(t + x - x', x') \quad (\text{A.18})$$

$$= + \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t, x') \psi(t, x') - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{x'}^{\infty} dx f(t, x) \psi'(t - x + x', x') \quad (\text{A.19})$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t, x') \psi(t, x') - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{x'} dx f(t, x) \psi'(t + x - x', x') \quad (\text{A.20})$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t, x') \psi(t, x') - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) \psi'(t - |x - x'|, x') \quad (\text{A.21})$$

Partielle Integration des ersten Terms in A.18 ergibt A.19, der zweite Term ergibt A.20. Man kann die jeweils zweiten Terme aus A.19 und A.20 wieder zusammenfassen. Die formale Rechnung mit Anwendung der Produkt- und Kettenregel ergibt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) \partial_x (\psi(t - |x - x'|, x') \text{sign}(x - x')) \quad (\text{A.22})$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) \psi'(t - |x - x'|, x') \underbrace{\text{sign}(x - x')^2}_1 \quad (\text{A.23})$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) \psi(t - |x - x'|, x') 2\delta(x - x') \quad (\text{A.24})$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) \psi'(t - |x - x'|, x') + 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t, x') \psi(t, x') \quad (\text{A.25})$$

Die Ausdrücke in A.25 und A.21 stimmen überein. Daraus folgt die Behauptung. \square

Proposition A.1.4. Für die formale Ableitung des Integranten aus A.15 folgt:

$$\begin{aligned}
& \partial_x (\text{sign}(x)V(t-|x|)\Theta(t-t'-|x|-|x'|)e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt''V(t'')}) \\
&= 2\delta(x)V(t-|x|)\Theta(t-t'-|x|-|x'|)e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt''V(t'')} \\
&\quad - V(t-|x|)\delta(t-t'-|x|-|x'|)e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt''V(t'')} \\
&\quad + (V(t-|x|)^2 - V'(t-|x|))\Theta(t-t'-|x|-|x'|)e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt''V(t'')}.
\end{aligned}$$

Beweis. Wir leiten die Testfunktion $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ab,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) \partial_x (\text{sign}(x)V(t-|x|)\Theta(t-t'-|x|-|x'|)e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt''V(t'')}) \quad (\text{A.26})$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx (\partial_x f(t, x)) \text{sign}(x)V(t-|x|)\Theta(t-t'-|x|-|x'|)e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt''V(t'')} \quad (\text{A.27})$$

$$= - \int_{t'+|x'|}^{\infty} dt \int_0^{t-t'-|x'|} dx (\partial_x f(t, x)) V(t-x) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-x} dt''V(t'')} \quad (\text{A.28})$$

$$+ \int_{t'+|x'|}^{\infty} dt \int_{-(t-t'-|x'|)}^0 dx (\partial_x f(t, x)) V(t+x) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t+x} dt''V(t'')} \quad (\text{A.29})$$

Partielle Integration des Integrals in Zeile A.28 führt zu den Termen A.30 und A.31, die partielle Integration des Integrals in Zeile A.29 auf die Terme A.32 und A.33,

$$= - \int_{t'+|x'|}^{\infty} dt f(t, t-t'-|x'|) V(t'+|x'|) + \int_{t'+|x'|}^{\infty} dt f(t, 0) V(t) e^{-\int_{t'+|x'|}^t dt''V(t'')} \quad (\text{A.30})$$

$$- \int_{t'+|x'|}^{\infty} dt \int_0^{t-t'-|x'|} dx f(t, x) (V(t-x)^2 - V'(t-x)) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-x} dt''V(t'')} \quad (\text{A.31})$$

$$+ \int_{t'+|x'|}^{\infty} dt f(t, 0) V(t) e^{-\int_{t'+|x'|}^t dt''V(t'')} - \int_{t'+|x'|}^{\infty} dt f(t, -(t-t'-|x'|)) V(t'+|x'|) \quad (\text{A.32})$$

$$- \int_{t'+|x'|}^{\infty} dt \int_{-(t-t'-|x'|)}^0 dx f(t, x) (V(t+x)^2 - V(t+x)) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t+x} dt''V(t'')} \quad (\text{A.33})$$

Nach Zusammenfassung der Terme folgt:

$$= - \int_{t'+|x'|}^{\infty} dt f(t, t-t'-|x'|) V(t'+|x'|) - \int_{t'+|x'|}^{\infty} dt f(t, -(t-t'-|x'|)) V(t'+|x'|) \quad (\text{A.34})$$

$$+ 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t, 0) V(t) \Theta(t-t'-|x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^t dt'' V(t'')} \quad (\text{A.35})$$

$$- \int_{t'+|x'|}^{\infty} dt \int_{-(t-t'-|x'|)}^{t-t'-|x'|} dx f(t, x) (V(t-|x|)^2 - V'(t-|x|)) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} . \quad (\text{A.36})$$

Die formale Ableitung führt zu folgendem Ergebnis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) \partial_x \left(\text{sign}(x) V(t-|x|) \Theta(t-t'-|x|-|x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} \right) \quad (\text{A.37})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) 2\delta(x) V(t-|x|) \Theta(t-t'-|x|-|x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} \quad (\text{A.38})$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) V'(t-|x|) \Theta(t-t'-|x|-|x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} \quad (\text{A.39})$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) V(t-|x|) \delta(t-t'-|x|-|x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} \quad (\text{A.40})$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) V(t-|x|)^2 \Theta(t-t'-|x|-|x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} . \quad (\text{A.41})$$

In A.38 führen wir die Integration über x und in A.40 über t aus und fassen zusammen:

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t, 0) V(t) \Theta(t-t'-|x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^t dt'' V(t'')} \quad (\text{A.42})$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} dx f(|x|+t'+|x'|, x) V(t'+|x'|) \quad (\text{A.43})$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t, x) (V(t-|x|)^2 - V'(t-|x|)) \Theta(t-t'-|x|-|x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} . \quad (\text{A.44})$$

Unter Verwendung der Substitution $x = t - t' - |x'|$ kann der Ausdruck in Zeile A.34 in den Ausdruck A.43 umgeformt werden. Damit ergeben sich auch in diesem Fall dieselben Integrale, womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Die avancierte Fundamentallösung hat selbes Verhalten und es gelten die selben Regeln bezüglich der Ableitungen nach t und x .

A.2 Die Ableitungen des Feldes

Berechnen wir jetzt explizit die Ableitungen der Felder, die sich in der Form

$$\phi(t, x) = \iint dx' dt' f(t', x') E_{ret}^V(t, x, t', x'), \quad f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2) \quad (\text{A.45})$$

schreiben lassen. Dabei wirken die Ableitungen nur auf die Fundamentallösungen E_{ret}^V der Feldgleichung 4.8. Wir verwenden dabei die im vorherigen Kapitel berechneten Ableitungsregeln.

Die Ableitung nach t berechnen wir unter Verwendung der Produkt- und Kettenregeln (vgl. Bemerkungen nach Definition A.1.2):

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(t, x) &= \int dx' \int dt' f(t', x') \delta(t - t' - |x - x'|) \\ &+ \int dx' \int dt' f(t', x') \delta(t - t' - |x| - |x'|) \left(e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} - 1 \right) \\ &+ \int dx' \int dt' f(t', x') \Theta(t - t' - |x| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} (-) V(t - |x|). \end{aligned}$$

Die erste Ableitung der Feldes $\phi(t, x)$ nach t ist:

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(t, x) &= \int dx' f(t - |x - x'|, x') \\ &- \int dx' \int dt' f(t', x') \Theta(t - t' - |x| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} V(t - |x|). \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Auch die zweite Ableitung kann nach den gewöhnlichen Methoden der Analysis mit Kettenregel und Produktregel leicht berechnet werden:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \phi(t, x) &= \int dx' \partial_t (f(t - |x - x'|, x')) \\ &- \int dx' \int dt' f(t', x') \partial_t (\Theta(t - t' - |x| - |x'|)) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} V(t - |x|) \\ &- \int dx' \int dt' f(t', x') \Theta(t - t' - |x| - |x'|) \partial_t (e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} V(t - |x|)). \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung des Feldes $\phi(t, x)$ nach t :

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \phi(t, x) &= \int dx' f'(t - |x - x'|, x') - \int dx' f(t - |x| - |x'|, x') V(t - |x|) \\ &+ \int dx' \int dt' f(t', x') \Theta(t - t' - |x| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} (V^2(t - |x|) - V'(t - |x|)). \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Für die Berechnungen der Ableitungen nach x bedienen wir uns nun den in Abschnitt A.1 hergeleiteten Ableitungsregeln. Für die erste Ableitung benötigen wir dabei Proposition A.1.1 und A.1.2:

$$\begin{aligned}\partial_x \phi(t, x) &= \int dx' \int dt' f(t', x') (-) \text{sign}(x - x') \delta(t - t' - |x - x'|) \\ &+ \int dx' \int dt' f(t', x') (-) \text{sign}(x) \delta(t - t' - |x| - |x'|) \left(e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} - 1 \right) \\ &+ \int dx' \int dt' f(t', x') (-) \text{sign}(x) \Theta(t - t' - |x| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} (-) V(t - |x|) .\end{aligned}$$

Zusammengefasst folgt für die erste Ableitung des Feldes $\phi(t, x)$ nach x :

$$\begin{aligned}\partial_x \phi(t, x) &= - \int dx' f(t - |x - x'|, x') \text{sign}(x - x') \\ &+ \text{sign}(x) \int dx' \int dt' f(t', x') \Theta(t - t' - |x| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} V(t - |x|) .\end{aligned}\tag{A.48}$$

Mit Proposition A.1.3 und A.1.4 läßt sich schließlich die zweite Ableitung nach x bestimmen:

$$\begin{aligned}\partial_x^2 \phi(t, x) &= -(-) \text{sign}(x - x') \int dx' \partial_{t-|x-x'|} f(t - |x - x'|, x') \text{sign}(x - x') \\ &- \int dx' f(t - |x - x'|, x') \partial_x \text{sign}(x - x') \\ &+ \int dx' \int dt' f(t', x') \partial_x \text{sign}(x) \Theta(t - t' - |x| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} V(t - |x|) \\ &+ \int dx' \int dt' f(t', x') \text{sign}(x) (-) \text{sign}(x) \partial_{t-|x|} \Theta(t - t' - |x| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} V(t - |x|) \\ &+ \int dx' \int dt' f(t', x') \text{sign}(x) (-) \text{sign}(x) \Theta(t - t' - |x| - |x'|) \partial_{t-|x|} \left(e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} V(t - |x|) \right) ,\end{aligned}$$

mit $\text{sign}(x - x') = [2\Theta(x - x') - 1]$ und $\text{sign}(x) = [2\Theta(x) - 1]$ folgt

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 \phi(t, x) &= \int dx' f'(t - |x - x'|, x') - \int dx' f(t - |x - x'|, x') 2\delta(x - x') \\
&+ \int dx' \int dt' f(t', x') 2\delta(x) \Theta(t - t' - |x| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} V(t - |x|) \\
&- \int dx' \int dt' f(t', x') \delta(t - t' - |x| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} V(t - |x|) \\
&+ \int dx' \int dt' f(t', x') \Theta(t - t' - |x| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} (V^2(t - |x|) - V'(t - |x|)) .
\end{aligned}$$

Zusammengefasst folgt für die zweite Ableitung des Feldes $\phi(t, x)$ nach x :

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 \phi(t, x) &= \int dx' f'(t - |x - x'|, x') - 2\phi(t, x) - \int dx' f(t - |x| - |x'|, x') V(t - |x|) \\
&+ \int dx' \int dt' f(t', x') \Theta(t - t' - |x| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} \\
&\quad (2\delta(x)V(t - |x|) + V^2(t - |x|) - V'(t - |x|)) . \tag{A.49}
\end{aligned}$$

Eine wichtige Eigenschaft der partiellen Ableitungen ist, dass sie vertauschen. Wir berechnen ausgehend von Gleichung (A.48) die Ableitung nach t :

$$\begin{aligned}
\partial_t(\partial_x \phi(t, x)) &= -\partial_t \left(\int dx' f(t - |x - x'|, x') \text{sign}(x - x') \right) \\
&+ \partial_t \left(\int dx' \int dt' f(t', x') \text{sign}(x) \Theta(t - t' - |x| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} V(t - |x|) \right) . \tag{A.50}
\end{aligned}$$

Als Ergebnis folgt:

$$\begin{aligned}
\partial_t(\partial_x \phi(t, x)) &= - \int dx' f'(t - |x - x'|, x') \text{sign}(x - x') \\
&+ \int dx' f(t - |x| - |x'|, x') \text{sign}(x) V(t - |x|) \\
&- \int dx' \int dt' f(t', x') \text{sign}(x) \Theta(t - t' - |x| - |x'|) e^{-\int_{t'+|x'|}^{t-|x|} dt'' V(t'')} (V^2(t - |x|) - V(t - |x|)) .
\end{aligned}$$

Die Ableitung von Gleichung A.46 nach x führt ebenfalls zu diesem Ergebnis. Die ersten Ableitungen nach t und x vertauschen also, $\partial_x(\partial_t \phi(t, x)) = \partial_t(\partial_x \phi(t, x))$.

Die Berechnung der Felder unter Verwendung des avancierten Propagators E_{av}^V führt zu analogen Ergebnissen.

Literaturverzeichnis

- [1] Carlo Rovelli. Loop quantum gravity. *LIVING REV.REL.*, 1:1, 1998.
- [2] Romeo Brunetti and Klaus Fredenhagen. Towards a background independent formulation of perturbative quantum gravity. *gr-qc/0603079*, 2006.
- [3] J. Wheeler. *Ann. Phys.*, 2:604, 1957.
- [4] Robert P. Geroch. Topology in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 8:782–786, 1969.
- [5] Frank J. Tipler. Causality violation in asymptotically flat space-times. *Phys. Rev. Lett.*, 37(14):879–882, Oct 1976.
- [6] Arvind Borde. Topology change in classical general relativity. *gr-qc/9406053*, 1994.
- [7] R. D. Sorkin. On topology change and monopole creation. *Phys. Rev.*, D33:978–982, 1986.
- [8] Gary T. Horowitz. Topology change in general relativity. *Class. Quant. Grav.*, 8:587, 1991.
- [9] A. Anderson and Bryce S. DeWitt. Does the topology of space fluctuate? *Found. Phys.*, 16:91–105, 1986.
- [10] Corinne A. Manogue, Tevian Dray, and Ed Copeland. The trousers problem revisited. *Pramana - J. Phys.*, 30:279–292, 1988.
- [11] H. F. Dowker and R. S. Garcia. A handlebody calculus for topology change. *Classical and Quantum Gravity*, 15:1859, 1998.
- [12] Robert M. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics (Chicago Lectures in Physics)*. University Of Chicago Press, November 1994.
- [13] A. P. Balachandran, G. Bimonte, G. Marmo, and A. Simoni. Topology change and quantum physics. *Nuclear Physics B*, 446:299, 1995.
- [14] Samuel L. Braunstein. A toy model for slowly growing wormholes as effective topology changes. *gr-qc/9610056*, 1996.
- [15] Fay Dowker and Sumati Surya. Topology change and causal continuity. *Physical Review D*, 58:124019, 1998.

- [16] H. F. Dowker, R. S. Garcia, and S. Surya. Morse index and causal continuity: A criterion for topology change in quantum gravity. *Class. Quant. Grav.*, 17:697–712, 2000.
- [17] A. Borde, H. F. Dowker, R. S. Garcia, R. D. Sorkin, and S. Surya. Causal continuity in degenerate spacetimes. *Class. Quant. Grav.*, 16, 1999.
- [18] Fredenhagen K. *Algebraische Quantenfeldtheorie*. Skript, Seifhennersdorf, 2003.
- [19] Dimock J. Algebras of local observables on a manifold. *Commun. Math. Phys.*, 77, no. 3:219–228, 1980.
- [20] R. M. Wald. *General Relativity*. Chicago, Usa: Univ. Pr. 491p, 1984.
- [21] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press 261 pp., 1973.
- [22] M. W. Hirsch. *Differential Topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.
- [23] John W. Milnor and Stasheff J.D. *Characteristic Classes*. Princeton University Press, Princeton, 1974.
- [24] John W. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
- [25] Rafael D. Sorkin. Forks in the road, on the way to quantum gravity. *Int. J. Theor. Phys.*, 36:2759–2781, 1997.
- [26] Rafael D. Sorkin. Consequences of space-time topology. *To appear in Proc. of 3rd Canadian Conf. on General Relativity and Relativistic Astrophysics, Victoria, Canada, May 1989*.
- [27] Fay Dowker. Topology change in quantum gravity. *gr-qc/0206020*, 2002.
- [28] John W. Milnor. *Lectures on the h-cobordism theorem*. Princeton University Press, Princeton, 1965.
- [29] S. W. Hawking and R. K. Sachs. Causally continuous spacetimes. *Commun. math Phys*, 35:287–296, 1974.
- [30] Friedlander F.G. *The wave equation on an curved space-time*. Cambridge University Press (February 27, 1976) 292 pages, 1976.
- [31] Bernard S. Kay, Marek J. Radzikowski, and Robert M. Wald. Quantum field theory on spacetimes with a compactly generated cauchy horizon. *Commun. Math. Phys.*, 183:533–556, 1997.
- [32] Robert M. Wald. The history and present status of quantum field theory in curved spacetime, 2006.
- [33] Steven G Harris and Tevian Dray. The causal boundary of the trousers space. *Class. Quantum Grav.*, 7:149–161, 1990.
- [34] Hansjörg Roos. *Mathematische Methoden der Theoretischen Physik*. Universität Göttingen, 2002. Vorlesungsskript, Wintersemester 2002/03.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Fredenhagen für die interessante Aufgabenstellung und die Betreuung meiner Diplomarbeit bedanken. Aus den gemeinsamen Gesprächen habe ich einen großen Nutzen gezogen und viel gelernt.

Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei der ganzen Arbeitsgruppe für die schöne gemeinsame Zeit und insbesondere bei Felix Reszewski, Christoph Ellmer, Christian Sommer, Heiner Olbermann, Tina Hartmann, Daniel Harms und den Kollegen aus Gebäude 66 für die interessanten Gespräche und die schöne Zeit.

Ein besonderer Dank gilt meinen Eltern und meiner Familie, die mich während meines Studiums immer mit Kräften unterstützt haben.

Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung

Ich versichere, diese Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel und Quellen verfasst zu haben. Ich gestatte die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Werner Bauer