Aufgabe 11
Gegeben:

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & \epsilon \\ \bar{\epsilon} & E_2 \end{pmatrix},\ E_1, E_2 \in \mathbb{R}, \epsilon \in \mathbb{C}, \epsilon \neq 0 \tag{1}$$

Gesucht sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von H, außerdem ist zu zeigen, dass der kleinste Eigenwert von H immer kleiner ist als E_1und E_2.

$$\det(H - \lambda\mathbb{E}) = (E_1 - \lambda)(E_2 - \lambda) - |\epsilon|^2 = 0$$

$$= E_1E_2 - \lambda E_1 - \lambda E_2 + \lambda^2 - |\epsilon|^2 = 0$$

$$\Longrightarrow |\epsilon|^2 - E_1E_2 = \lambda^2 - \lambda\left(E_1 + E_2\right)$$

$$\Longrightarrow |\epsilon|^2 - E_1E_2 + \frac{(E_1+E_2)^2}{4} = \left(\lambda + \frac{E_1+E_2}{2}\right)^2$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(E_1 + E_2) \pm \sqrt{4|\epsilon|^2 + E_1^2 - 2E_1E_2 + E_2^2}$$

$$\frac{1}{2}(E_1 + E_2) \pm \sqrt{4|\epsilon|^2 + (E_1 - E_2}$$

$$(H - \lambda_1\mathbb{E})\overrightarrow{x_1} = 0$$

$$\begin{pmatrix} E_1 - \lambda_1 & \epsilon \\ \bar{\epsilon} & E_2 - \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} \frac{E_1 - E_2 + \sqrt{4|\epsilon|^2 + (E_1-E_2)^2}}{\bar{\epsilon}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(H - \lambda_2 1\right)\overrightarrow{x_2} = 0$$

$$\begin{pmatrix} E_1 - \lambda_2 & \epsilon \\ \bar{\epsilon} & E_2 - \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} \frac{E_1 + E_2 - \sqrt{4|\epsilon|^2 + (E_1-E_2)}}{\bar{\epsilon}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

o.B.d.A. $E_1 > E_2$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(E_1 + E_2\right) - \sqrt{4\left|\epsilon\right| + \left(E_1 - E_2\right)} < E_2$$

$$\Longleftrightarrow \left(E_1 + E_2\right) - \sqrt{4\left|\epsilon\right| + \left(E_1 - E_2\right)} < 2E_2$$

$$\Longleftrightarrow \left(E_1 - E_2\right) < 4\left|\epsilon\right| + \left(E_1 - E_2\right)$$

$$\Longrightarrow |\epsilon|^2 > 0$$