

Aufgabe 6

Zu zeigen ist, dass alle unitären (2×2) -Matrizen U (d. h. $U^*U = \mathbb{1}$) sich in der Form

$$U = a(b_0\mathbb{1} + i\vec{b}\vec{\sigma}), \quad a \in \mathbb{C}, \quad b_0 \in \mathbb{R}, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

mit $|a| = 1$ und $b_0^2 + |\vec{b}|^2 = 1$ darstellen lassen.

D. h. also, dass wir eine Äquivalenz der Aussagen beweisen müssen.

Wir zeigen zunächst

$$U = a(b_0\mathbb{1} + i\vec{b}\vec{\sigma}), \quad a \in \mathbb{C}, \quad b_0 \in \mathbb{R}, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad |a| = 1 \quad \text{und} \quad b_0^2 + |\vec{b}|^2 = 1 \Rightarrow U \text{ Unitär:}$$

Gegeben war

$$U = a(b_0\mathbb{1} + i\vec{b}\vec{\sigma}) = a \begin{pmatrix} b_0 + ib_3 & -ib_1 - b_2 \\ -b_2 + ib_1 & b_0 - ib_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

woraus ja

$$U^* = a \begin{pmatrix} b_0 - ib_3 & -b_2 + ib_1 \\ -b_2 - ib_1 & b_0 + ib_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

folgt, sodass:

$$U^*U = \bar{a}a \begin{pmatrix} b_0^2 + |\vec{b}|^2 & 0 \\ 0 & b_0^2 + |\vec{b}|^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Nach Voraussetzung ist $b_0^2 + |\vec{b}|^2 = 1$ und $|a| = 1$, sodass aus *Gleichung 3* leicht die Behauptung folgt:

$$U^*U = |a|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Weiter zeigen wir, dass

$$U \text{ Unitär} \Rightarrow U = a(b_0\mathbb{1} + i\vec{b}\vec{\sigma}), \quad a \in \mathbb{C}, \quad b_0 \in \mathbb{R}, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad |a| = 1 \quad \text{und} \quad b_0^2 + |\vec{b}|^2 = 1:$$

Wir wissen, dass sich jede (2×2) -Matrix als Linearkombination von $\mathbb{1}$ und den Pauli-Matrizen schreiben lässt:

$$U = a_0\mathbb{1} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}, \quad (4)$$

wobei $a_0 \in \mathbb{C}$, $\vec{a} \in \mathbb{C}^3$.

Mit *Gleichung 4* folgt auch

$$U^* = \bar{a}_0\mathbb{1} + \vec{\bar{a}} \cdot \vec{\sigma}. \quad (5)$$

Aus *Gleichung 4* und *Gleichung 5* folgt sofort:

$$U^*U = \bar{a}_0a_0\mathbb{1} + \bar{a}_0\vec{a} \cdot \vec{\sigma} + a_0\vec{\bar{a}} \cdot \vec{\sigma} + (\vec{\bar{a}} \cdot \vec{\sigma}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \quad (6)$$

$$= |a_0|^2\mathbb{1} + (\bar{a}_0\vec{a} + a_0\vec{\bar{a}})\vec{\sigma} + \vec{\bar{a}} \cdot \vec{a}\mathbb{1} + i(\vec{\bar{a}} \times \vec{a})\vec{a} \quad (7)$$

Von *Gleichung 6* zu *Gleichung 7* kommen wir mit der *Formel 1.14*¹. Da wir nun wissen, dass $U^*U = \mathbb{1}$, können wir dies mit *Gleichung 7* gleichsetzen:

$$\mathbb{1} = \underbrace{a_0^2\mathbb{1}}_{\circ} + (\bar{a}_0\vec{a} + a_0\vec{\bar{a}})\vec{\sigma} + \underbrace{\vec{\bar{a}} \cdot \vec{a}\mathbb{1}}_{\circ} + i(\vec{\bar{a}} \times \vec{a})\vec{a} \quad (8)$$

Wir können nun mit den Einträgen $\circ$ leicht folgern, dass

$$|a_0|^2 + \vec{\bar{a}} \cdot \vec{a} = 1, \quad (9)$$

¹siehe auf http://unith.desy.de/sites/site_unith/content/e20/e72/e180/e111754/e112955/TheorieA.pdf

außerdem müssen die anderen Einträge null sein, sodass

$$(\overline{a_0}\vec{a} + a_0\vec{\overline{a}}) + i(\vec{\overline{a}} \times \vec{a})\vec{a} = 0. \quad (10)$$

Da nun $(\vec{\overline{a}} \times \vec{a})$ senkrecht auf $\vec{\overline{a}}$ und $\vec{a}$ steht, muss es notwendig null sein, daraus folgt, dass $\vec{\overline{a}}$ parallel $\vec{a}$, also

$$\vec{\overline{a}} = \mu\vec{a}, \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

Das heißt nun aber, dass aus *Gleichung 10* dann folgt, dass $\Re(\overline{a_0}\vec{a}) = 0$.²

Wenn wir nun setzen, dass

$$1. \quad \vec{a} = a \cdot i\vec{b}, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } a \in \mathbb{C} \text{ und } |a| = 1 \quad (*)$$

$$2. \text{ und } a_0 = ab_0, \quad b_0 \in \mathbb{R} \quad (**)$$

würde genau der erste Teil von *Gleichung 1* gelten, da *Gleichung 4* dann zu

$$U = a(b_0\mathbb{1} + i\vec{b}\vec{\sigma}) \quad (11)$$

umgeformt werden kann, was wir jetzt zeigen:

Da nun

$$\vec{\overline{a}} = \overline{a} \cdot (-i) \cdot \vec{b} \stackrel{!}{=} \mu a i \vec{b},$$

folgt

$$\mu = \frac{-\overline{a}}{a}$$

und da $|a| = 1$ folgt $\overline{a} = \frac{1}{a}$.

Damit ist dann aber

$$\mu = -\overline{a}^2.$$

Dann ist also $\overline{a} = \sqrt{-\mu}$, also $a = \sqrt{-\mu}$

und wir können – bei gefundenem a , und gegebenen $\vec{a}$ und a_0 – mit $(*)$ und $(**)$ leicht $\vec{b}$ und b_0 bestimmen.

Wenn wir nun also aus *Gleichung 4* die Form der *Gleichung 1* erhalten, dann muss jede Matrix U , die unitär ist, auch in der Form der *Gleichung 1* mit

$$b_0^2 + |\vec{b}|^2 = 1$$

darstellbar sein, da sie in der Form der *Gleichung 4* (siehe Vorlesung) und der Bedingung aus *Gleichung 9* geschrieben werden kann.

q.e.d.

Anmerkung:

$\vec{\overline{a}} \cdot \vec{a}$ ist wegen $\vec{\overline{a}} = \mu a i \vec{b}$ und $|a|^2 = 1$ sowie $|\mu|^2 = 1$ leicht umformbar:

$$\vec{\overline{a}} \cdot \vec{a} = |\mu|^2 \cdot |a|^2 |\vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2$$

Damit folgt aber aus der *Gleichung 9* sofort die geforderte Bedingung zu

$$b_0^2 + |\vec{b}|^2 = 1.$$

²wobei $\Re$ der Realteil ist; und der Imaginarteil bei der Addition wegfällt.