

(a) Die Grundzustandswellenfunktion des Wasserstoffatoms ist gegeben durch

$$\Phi(x) = N e^{-\frac{|x|}{a}}, \quad a \text{ Bohrscher Radius, } N > 0$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält sich das Teilchen im Inneren einer Kugel mit Radius R um den Ursprung auf?

Als erstes bestimmen wir den Normierungsfaktor $N > 0$.

Es gilt für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im gesamten Raum:

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)\|^2 &\stackrel{!}{=} 1 \\ &= \int_0^\infty dr 4\pi \cdot r^2 \overline{\Phi(r)} \Phi(r) \\ &= 4\pi \cdot N^2 \int_0^\infty dr r^2 e^{-\frac{2r}{a}} \end{aligned}$$

nach Substitution mit

$$\begin{aligned} u &= \frac{2r}{a} \Leftrightarrow r^2 = u^2 \frac{a^2}{4} \\ \frac{du}{dr} &= \frac{2}{a} \Leftrightarrow dr = du \frac{a}{2} \end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)\|^2 &= N^2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} \int_0^\infty du u^2 e^{-u} \\ &= N^2 \cdot \pi \cdot \frac{a^3}{2} \cdot 2! \\ &= N^2 \cdot \pi \cdot a^3 \\ \Rightarrow N &= \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot a^3}} \end{aligned}$$

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Inneren der Kugel ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} W(r \in [0, R] | \Phi) &= \int_0^R dr 4\pi \cdot r^2 \overline{\Phi(r)} \Phi(r) \\ &= 4\pi \cdot N^2 \int_0^R dr r^2 e^{-\frac{2r}{a}} \\ &= 4\pi \cdot \frac{1}{\pi \cdot a^3} \int_0^R dr r^2 e^{-\frac{2r}{a}} \end{aligned}$$

mit Stammfunktion aus Formelsammlung folgt:

$$\begin{aligned} &= 4\pi \cdot \frac{1}{\pi \cdot a^3} \left(\left(-\frac{aR^2}{2} - \frac{a^2 R}{2} - \frac{a^3}{4} \right) e^{-2\frac{R}{a}} + \frac{a^3}{4} \right) \\ &= \left(-\frac{R^2}{a^2} - \frac{R}{a} - \frac{1}{2} \right) 2e^{-2\frac{R}{a}} + 1 \end{aligned}$$

(b) Wie groß ist der Erwartungswert von $|x|^n$, $n \in \mathbb{N}$?

$$\langle |x|^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \overline{\Phi(x)} |x|^n \Phi(x)$$

in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} &= 4\pi N^2 \int_0^{\infty} dr e^{-\frac{r}{a}} |r^n| e^{-\frac{r}{a}} \cdot r^2 \\ &= 4\pi N^2 \int_0^{\infty} dr e^{-2\frac{r}{a}} r^{n+2} \end{aligned}$$

Substitution:

$$\begin{aligned} &= 4\pi N^2 \int_0^{\infty} du \frac{a}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^{n+2} \cdot u^{n+2} e^{-u} \\ &= 4\pi N^2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{n+3} \int_0^{\infty} du u^{n+2} e^{-u} \\ &= 4\pi N^2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{n+3} \cdot (n+2)! \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^n (n+2)! \end{aligned}$$

(c) Wie groß ist der Erwartungswert der kinetischen Energie?

Wir rechnen in Kugelkoordinaten:

$$\langle T \rangle = 4\pi \int_0^{\infty} dr r^2 N e^{-\frac{r}{a}} \frac{\hbar^2}{2m} (-\Delta) N e^{-\frac{r}{a}}$$

Laplaceoperator in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} &= -\frac{\hbar^2 \cdot 2\pi \cdot N^2}{m} \int_0^{\infty} dr e^{-\frac{r}{a}} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} e^{-\frac{r}{a}} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} e^{-\frac{r}{a}} \right) r^2 \\ &= -\frac{\hbar^2 \cdot 2\pi \cdot N^2}{m} \int_0^{\infty} dr e^{-2\frac{r}{a}} \left(-\frac{2r}{a} + \frac{r^2}{a^2} \right) \\ &= -\frac{\hbar^2 \cdot 2\pi \cdot N^2}{m} \left(\int_0^{\infty} dr \frac{r^2}{a^2} e^{-2\frac{r}{a}} + \int_0^{\infty} dr \frac{2r}{a} e^{-2\frac{r}{a}} \right) \end{aligned}$$

Die Integrale lassen sich nun mittels partieller Integration lösen und es ist:

$$\langle T \rangle = \frac{\hbar^2 \pi N^2 a}{2m}$$