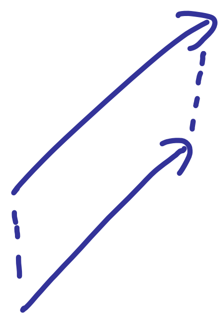
(5) Vektorrechnung

(z.B. physikalische) Größen mit Betrag und Richtung

Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, elektrische / magnetische Feldstärke, ...

"Pfeilmodell" von Vektoren

Vektor: $\vec{a}$



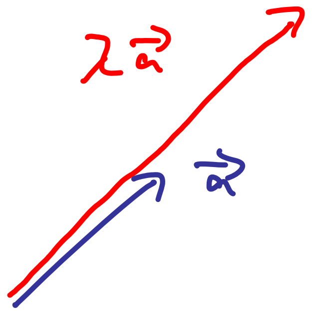
Richtung von $\vec{a}$: Pfeilrichtung

Betrag von $\vec{a}$ = $|\vec{a}|$: Länge des Pfeils

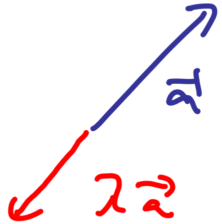
Rechenregeln:

(i) Addition von Vektoren

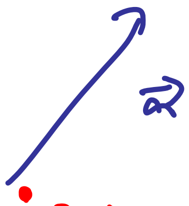
(ii) Multiplikation eines Vektor mit einer (reellen) Zahl



$\lambda > 0$



$\lambda < 0$



$\lambda = 0$

$\lambda\vec a = 0\vec a = \vec 0$

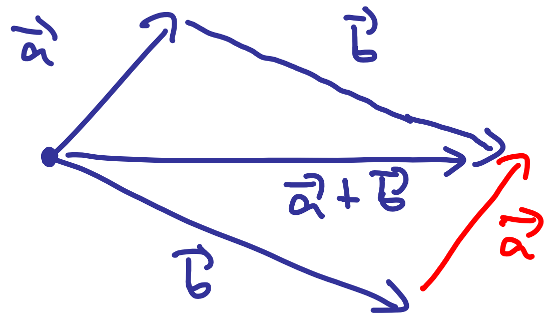
Einheitsvektor

sei $\vec a$ beliebig $(\vec a \neq 0)$

$$\frac{1}{|\vec a|}\cdot\vec a =: \vec e_a$$

$$|\vec e_a| = 1$$

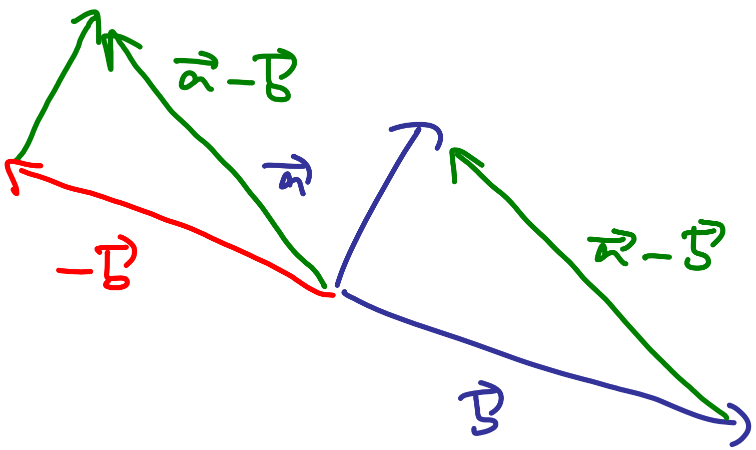
Addition



$$\vec a + \vec b = \vec b + \vec a$$

(Subtraktion)

$$\vec a - \vec b = \vec a + (-\vec b) = \vec a + (-1)\cdot \vec b$$



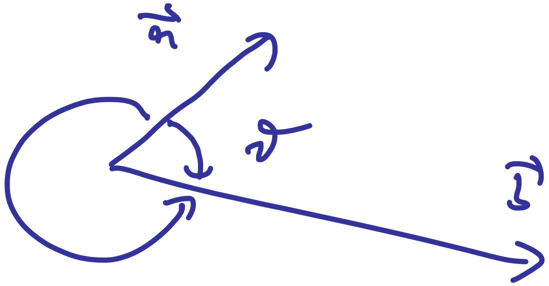
Def.: Ein <u>Vektorraum</u> V ist eine Menge $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots\}$ mit folgenden Operationen $\vec{a}+\vec{b}$, $\lambda \cdot \vec{a}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, so dass

- $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ Kommutativgesetz der Addition
- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ Assoziativgesetz der Addition
- $\exists\, \vec{0} : \vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$ für alle $\vec{a}$, $\vec{0}$: "neutrales Element" der Addition
- $\forall \vec{a}\ \exists -\vec{a}$ ("Gegenvektor") : $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$
- $\lambda \cdot (\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

  Distributivität
- $(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$ Multiplikation ist assoziativ
- $1\vec{a} = \vec{a}$ Multiplikation mit dem neutralen Element der Multiplikation in $\mathbb{R}$

$\vec{a} \in V$ heißt dann Vektor

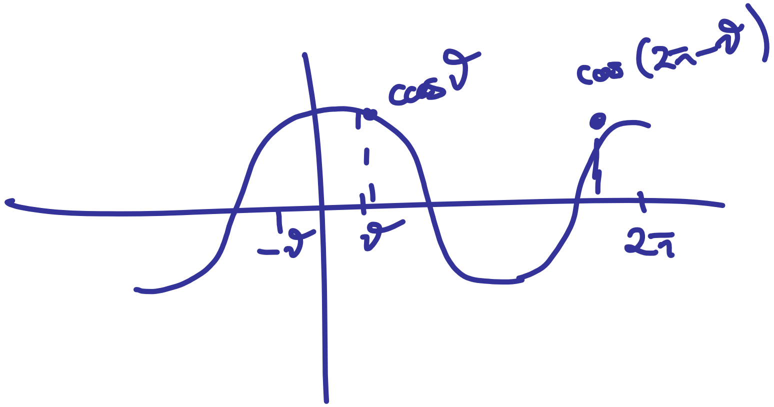
Skalarprodukt



seien $\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren, dann ist

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} := |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\vartheta}$$

$$\cos\vartheta = \cos(-\vartheta) = \cos(2\pi-\vartheta)$$



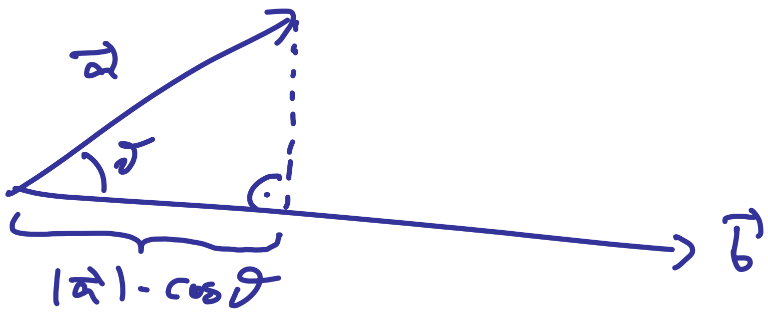
$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \cos\vartheta$$

kann zur Berechnung von ϑ (bzw. $\cos\vartheta$) benutzt werden (falls $\vec{a}\cdot\vec{b}$ bekannt ist)

geometrische Bedeutung:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}| \cdot$ Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$

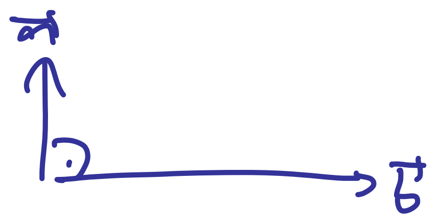
$= |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\vartheta$



Spezialfälle

- $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0 = |\vec{a}|^2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2}$
- $\vec{e}\cdot\vec{e} = |\vec{e}|\cdot|\vec{e}|\cdot\cos 0 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad |\vec{e}| = \sqrt{\vec{e}^2} = 1 \quad \cancel{\vec{a}^2}$
- für $\vec{a}, \vec{b}$ mit $\vec{a} \perp \vec{b}$ gilt:

  $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\underbrace{\cos\pi/2}_{0} = 0$

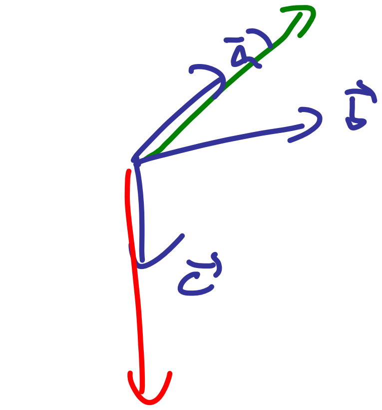


Rechenregeln

- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (Kommutativität)
- $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda\cdot(\vec{a}\,\vec{b})$
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\,\vec{c}$
- $-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \leq \underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\vartheta} \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ $\quad(-1 \leq \cos\vartheta \leq 1)$

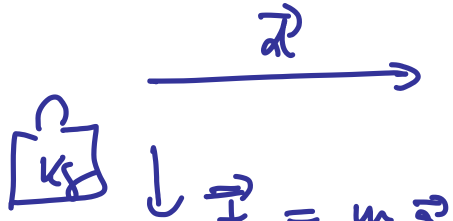
Schwarzsche Ungleichung

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$?



nein!

$W = \vec{F}\cdot\vec{d}$



$\vec{F} = m\,\vec{g}$

$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = 0$

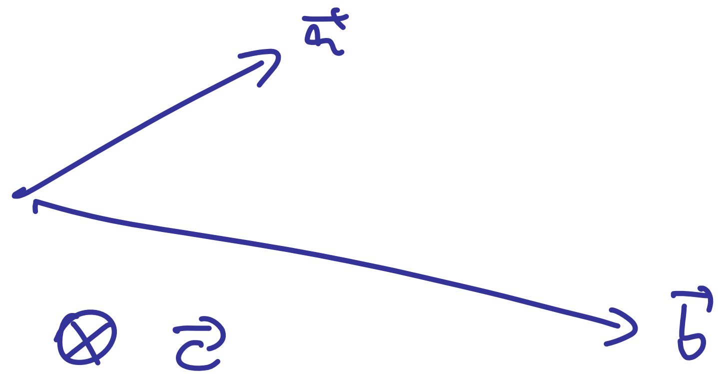
Kreuzprodukt, Vektorprodukt, äußere Produkt

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ein Vektor!

Richtung von $\vec{c}$?

$\vec{c}$ steht senkrecht auf der durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene

$\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$



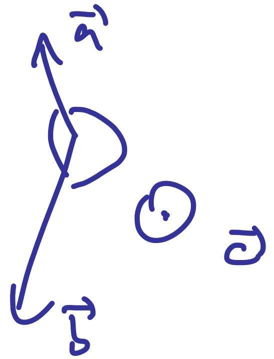
Rechte-Hand-Regel

$\vec{a} \Leftrightarrow$ Daumen

$\vec{b} \Leftrightarrow$ Zeigefinger

$\vec{c} \Leftrightarrow$ Mittelfinger

$\vartheta \leq 180°$!



$\vec{c}$ zeigt in die Zeichenebene hinein es gilt:

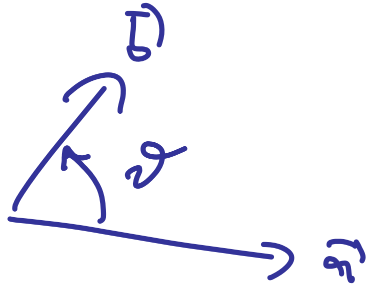
$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$$

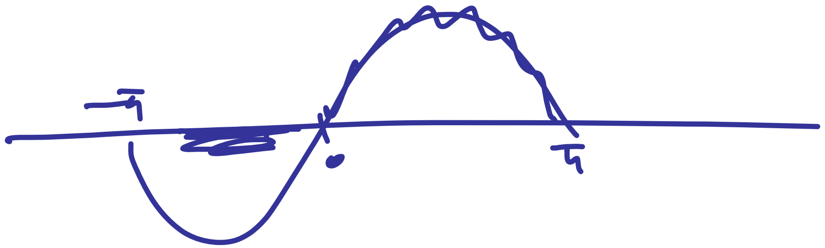
$$\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} \qquad \text{(Antikommutativität)}$$

Betrag von $\vec{a}\times\vec{b}$

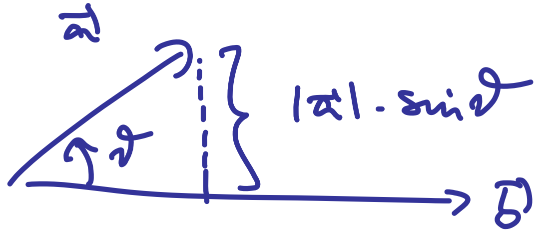
$$|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}| := |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\vartheta$$



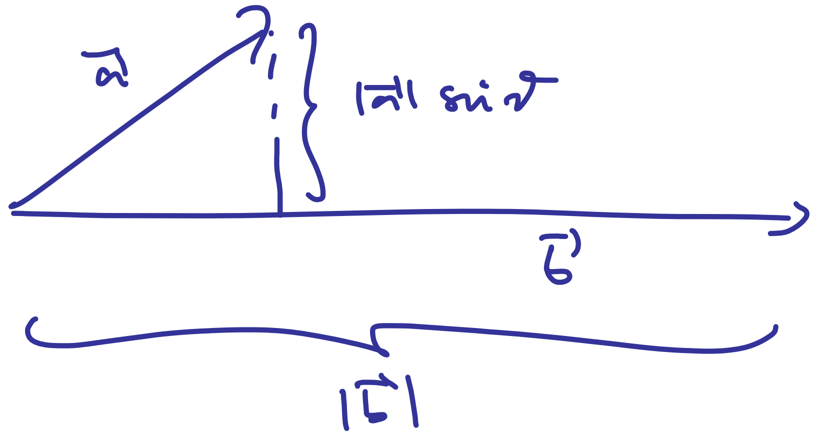


$$\boxed{0 \leq \vartheta \leq \pi}$$

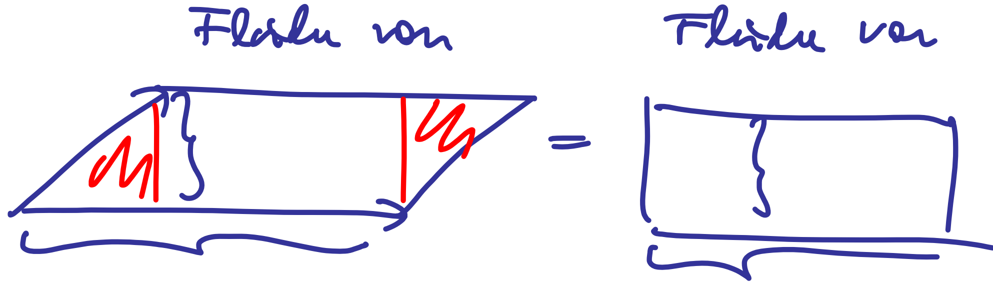
geometrische Bedeutung



Projektion auf die Gerade $\perp$ zu $\vec{b}$ in der Ebene, die durch $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannt wird.



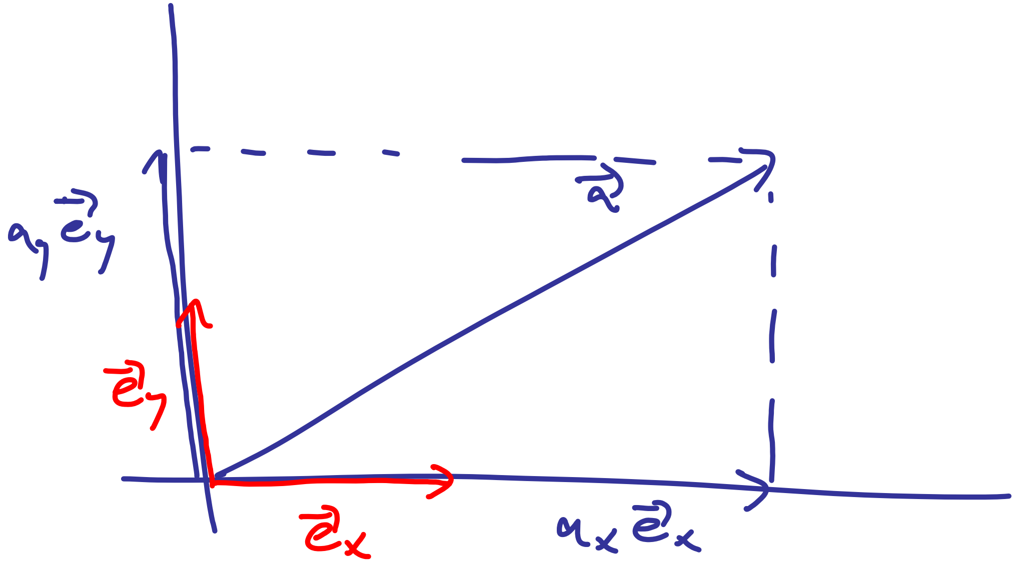
$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \sin\vartheta \cdot |\vec{b}|$$



$|\vec{a} \times \vec{b}|$ = Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definierten Parallelogramms

Jeder Vektorraum hat eine Basis!

Hier, in der Ebene:



$|\vec{e}_x| = 1$

$|\vec{e}_y| = 1$

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$

Orthonormalbasis

$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$ $\quad$ a_x, a_y heißen die Komponenten von $\vec{a}$

3D:

$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$

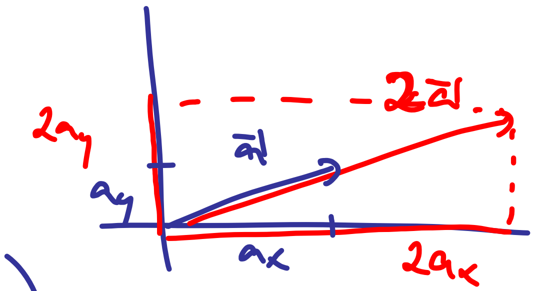
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{Spaltenvektor}$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad \text{Zeilenvektor}$$

Addition von $\vec{a}$ mit $\vec{b}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Bsp.: $$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



skalare Multiplikation

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1}{1 \cdot \sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1} = 1$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$q \vec{v} \times \vec{B} = \vec{F}_{\text{Lorentzkraft}}$$