Partielle Integration: (Umkehrung der Produktregel)

$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

Substitutionsregel: (Umkehrung der Kettenregel)

$$\int_{x_1}^{x_2} f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{y_1}^{y_2} f(y)\,dy \qquad \begin{aligned} y_1 &= g(x_1)\\ y_2 &= g(x_2)\end{aligned}$$

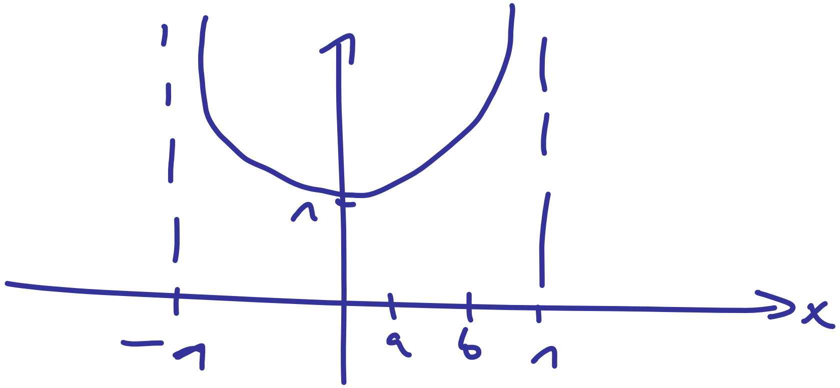
„Beweis": $y = g(x)$ (Substitution)

$$\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{f(\underbrace{g(x)}_{y})}_{f(y)}\cdot \underbrace{g'(x)}_{\frac{d}{dx}y(x) \,=\, \frac{dy}{dx}}\,dx \xrightarrow{\text{kürzen}} = \int_{y_1}^{y_2} f(y)\,dy \xrightarrow{\text{erweitern}} = \int_{x_1}^{x_2} f(g(x))\cdot\frac{dy}{dx}\,dx$$

mit: $\frac{dy}{\cancel{dx}}\cdot\cancel{dx} = dy$

Bsp: $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$-1 < a,b < 1$



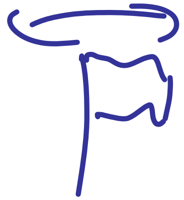
$y = 1 - x^2 = y(x)$

$\Updownarrow$

$x = \pm\sqrt{1-y}$

$\displaystyle\frac{dx}{dy} = \pm \frac{1}{2\sqrt{1-y}}\cdot(-1)$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{y(a)}^{y(b)} \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{dx}{dy}\,dy = \mp\int_{y(a)}^{y(5)} \frac{1}{\sqrt{y}}\,\frac{1}{2\sqrt{1-y}}\,dy$$



geht nicht weiter

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$\|$$

$$\int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \frac{1}{|\cos y|} \cos y \, dy$$

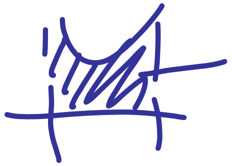
$$\|$$

$$\int_{\arcsin a}^{\arcsin b} dy = \arcsin b - \arcsin a$$

$a \to -1$

$b \to +1$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \pi$$



$= \pi$

f diff'bar $\Rightarrow$ f stetig $\Rightarrow$ f integrierbar

$$x = \sin y$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}}$$

$$= \frac{1}{|\cos y|}$$

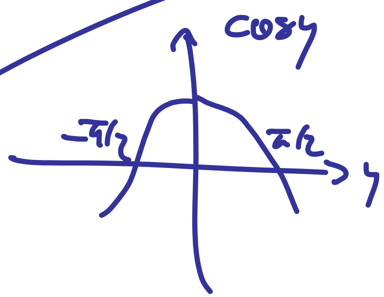
$$\sqrt{x^2} = |x|$$

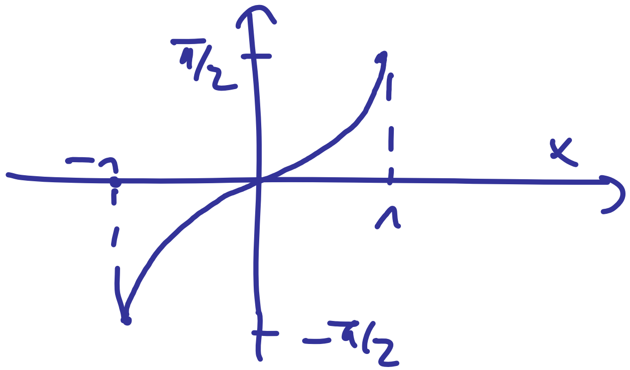
$$dx = \frac{dx}{dy}\, dy = \cos y \, dy$$

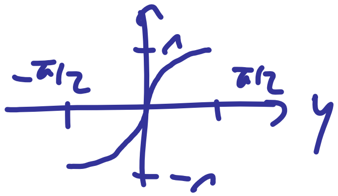
$$y = \arcsin x$$

$$y(b) = \arcsin b$$

$$y(a) = \arcsin a$$







Bsp.:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+x^2}\, dx$$

$$x = \sinh y$$

$$1 + x^2 = 1 + \sinh^2 y = \cosh^2 y$$

$$\frac{dx}{dy} = \cosh y$$

$$\Downarrow$$

$$\int \sqrt{\cosh^2 y} \cdot \frac{dx}{dy}\, dy$$

$$\Downarrow$$

$\cosh x > 0$

$\Downarrow$

$\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$

$$\int_{y_1}^{y_2} \cosh y \cosh y\, dy$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \cosh^2 y\, dy = \int_{y_1}^{y_2} \sinh' y \cosh y\, dy$$

$$\Downarrow$$

$$\sinh y \cdot \cosh y \Big|_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} \sinh^2 y\, dy$$

$$\sinh^2 y = \cosh^2 y - 1$$

etc. etc. etc.

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx \qquad x = \tan y$$

$$1 + \tan^2 y = 1 + \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d \tan y}{dy} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$\int \frac{1}{\cos y} \frac{1}{\cos^2 y}\, dy$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{1}{\cos^3 y}\, dy$$

④ Komplexe Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$

$n + 3 = 1$ hat keine Lsg in $\mathbb{N}$ $(n = -2)$

$\downarrow$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ ganze Zahlen $k \in \mathbb{Z}$

$3k = 1$ hat keine Lsg in $\mathbb{Z}$ $(k = 1/3)$

$\downarrow$

$\mathbb{Q} = \{ q/p \mid q, p \in \mathbb{Z}, p \neq 0 \}$ rationale Zahlen $r \in \mathbb{Q}$

$r^2 = 2$ hat keine Lsg. in $\mathbb{Q}$ $(r = \sqrt{2})$

$\downarrow$

$\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

$x^2 = -1$ hat keine Lsg. in $\mathbb{R}$

Def: Eine Lsg. der Gleichung $x^2 = -1$ wird mit i bezeichnet

$$i^2 = -1$$

Man schreibt: $i = \sqrt{-1}$

i : "imaginäre Einheit"

$x^2 = -b^2$, $(b \in \mathbb{R})$ kann formal gelöst werden durch

$x = ib$, denn $x^2 = (ib)^2 = i^2 b^2 = -1 \cdot b^2 = -b^2$ ✓

Man muss i mit reellen Zahlen multiplizieren können!

$(x-a)^2 = -b^2$ $(a, b \in \mathbb{R})$ kann formal gelöst werden durch

$x = a + ib$, denn $(a + ib - a)^2 = (ib)^2 = -b^2$ ✓

Man muss i (bzw. bi) mit reellen Zahlen addieren können!

Def: Eine komplexe Zahl z ist eine formale Summe

$$z = x + iy \qquad (x, y \in \mathbb{R}),$$

($\mathbb{C}$ bezeichnet die Menge der komplexen Zahlen) $\quad \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$

$\{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

für die die folgenden Rechenregeln gelten

$$z_1 + z_2 := (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$$

$$= x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)$$

$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

$$i^2 = -1$$

Bsp.:

- $2i^2 = 2 \cdot i^2 = 2 \cdot (-1) = -2$
- $(1+3i) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,e\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + i(3+e)$
- $2i = 0 + 2i \qquad (z + 0 = z)$
- $z \cdot 0 = 0$
- $(1-i) + (1+i) = 2$
- $i^4 = (i^2)^2 = i \cdot i \cdot i \cdot i$

  $= (-1)^2 = 1$

$$i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

?

$$\underline{i = \sqrt{-1}}$$

?

- $i^0 = 1 \qquad i^{-2} = \frac{1}{i^2} \qquad i^{-2} i^2 = \frac{1}{i^2} \cdot i^2 = 1$ ✓

  $i^{-2} i^2 = i^{-2+2} = i^0$ ✓
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$
- $i^4 = 1$
- $i^5 = i$

- $(1-i)(1+i) = 1^2 - i^2 = 2$

  $(1-i)(1+i) = 1 + i - i + (-i)i = 2$

Def: $z = x + iy$, dann definiert man

a) $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}\, z = x$ Realteil von z

b) $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}\, z = y$ Imaginärteil von z

$\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z \in \mathbb{R}$ $\mathrm{Im}\, z = y$ <u>und nicht iy</u>

c) $\bar{z} = z^* := x - iy$ die zu z konjugierte Zahl (komplexe Konjugation)

$\mathrm{Re}\, \bar{z} = \mathrm{Re}\, z$

$\mathrm{Im}\, \bar{z} = -\mathrm{Im}\, z$

Bsp: $z = i^3 y \Rightarrow z = -iy \Rightarrow \mathrm{Re}\, z = 0$, $\mathrm{Im}\, z = -y$ $\frac{1}{1-2} = -1$

<u>p-adische Zahlen</u> Körper

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$

$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots$