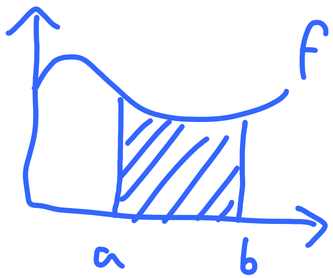
Vorlesung 9 - Integralrechnung

Bisher: Differentialrechnung = Steigung einer Funktion

Jetzt: Integralrechnung = Fläche zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse in einem Intervall $x \in [a,b]$

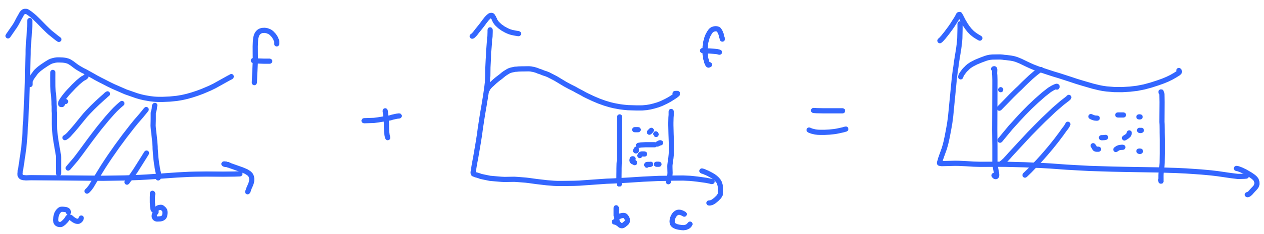


$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$ → Schreibweise? Gleich

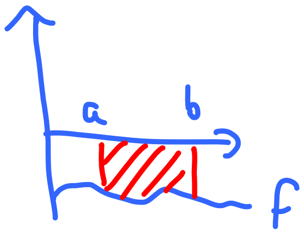
Eigenschaften des Integrals:

(i) Intervall-additiv

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$



(ii) Orientiert

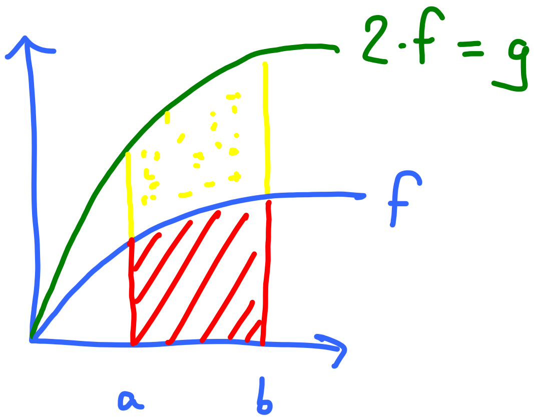


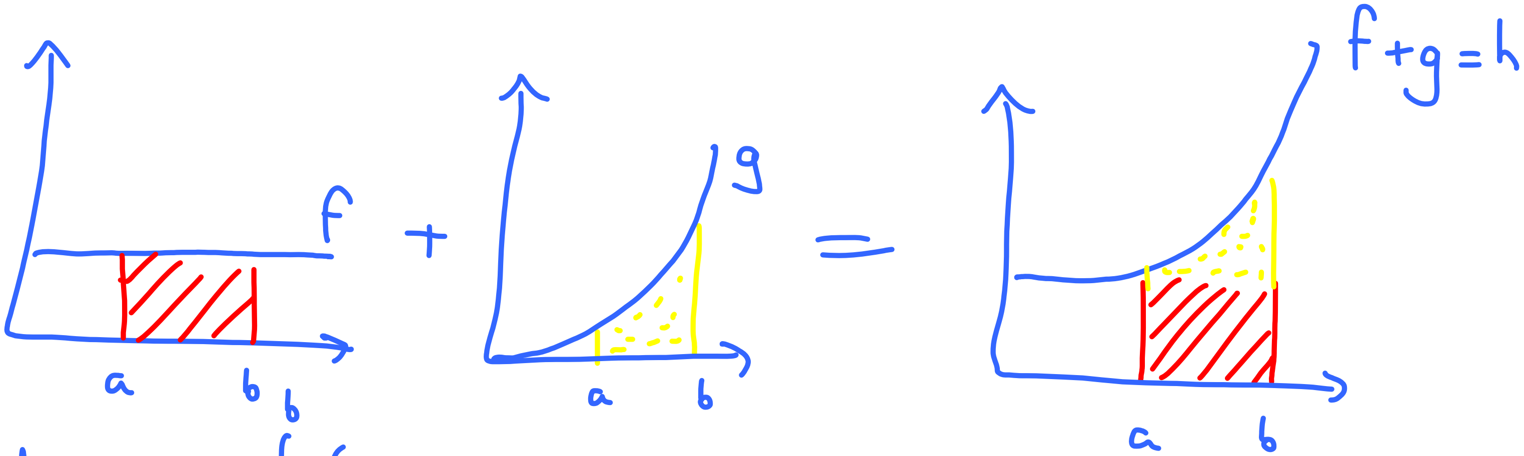
$$\int_a^b f(x)\,dx < 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

(iii) Linear

$$\int_a^b (\lambda \cdot f(x))\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$





$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx$$

Daraus folgt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, wenn $\forall a,b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Stammfunktionen sind nicht eindeutig: Sei $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dann $\tilde{F}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tilde{F}(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

$$\tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = F(b) + c - F(a) - c = \int_a^b f(x)\,dx \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

$\longrightarrow$ unendlich viele Stammfunktionen

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ "bestimmtes Integral"

Betrachte: $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int_a^x f(z)\,dz = F(x) - F(a)$

Integrationsvariable

(da $F(a)$ eine Konstante ist, ist auch G eine Stammfunktion zu f.)

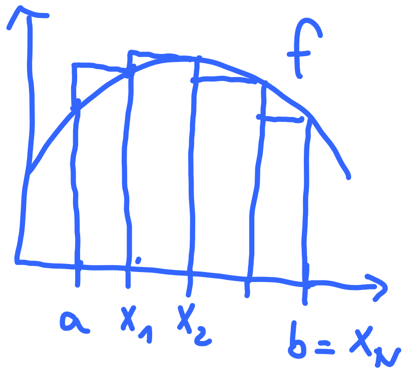
Oft schreibt man ohne Integralgrenzen $\int f(x)\,dx = F(x)$

Schreibweise ist aus zwei Gründen inkonsistent:

(i) Die rechte Seite der Gleichung ist nicht eindeutig (Konstante)

(ii) Die Integrationsvariable x auf der linken Seite ist gewissermaßen absummiert, tritt rechts aber als freie Variable auf.

Zur Berechnung von $\int_a^b f(x)dx$



$$x_1 = a + \Delta x$$
$$x_2 = a + 2\Delta x$$
$$\vdots$$
$$x_N = a + N \cdot \Delta x = b$$

Idee: Approximiere den Flächeninhalt unter der Kurve durch Rechtecke, deren Flächeninhalt einfach berechnet werden kann.

Dazu: Zerteile die x-Achse im Integrationsintervall [a,b] in N gleich große Abschnitte der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{N}$.
Der Funktionswert an der rechten Seite des Rechtecks (Stützstelle x_k) definiert die Höhe des Rechtecks.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{N} (\text{Flächeninhalt des } k\text{-ten Rechtecks})$$

$$= \sum_{k=1}^{N} f(a + k \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$$

Je mehr Rechtecke, desto besser die Approximation:

"S" wie Summe

Höhe des Rechtecks

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(a+k\cdot\Delta x)\cdot \Delta x$$

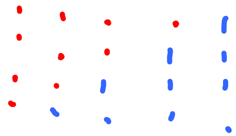
Infinitesimale Breite des Rechtecks

Beispiel: $\int_a^b f(x)\,dx$ für $f(x) = x^2$ und $a = 0$

Dafür benötigen wir aus dem Fortgeschrittenenkurs:

$$\forall N \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \qquad \left(\text{vgl. } \forall N \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2} \right)$$

Damit:



$$\int_0^b x^2\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} (0 + k\cdot\Delta x)^2 \cdot \Delta x \quad , \quad \Delta x = \frac{b}{N}$$

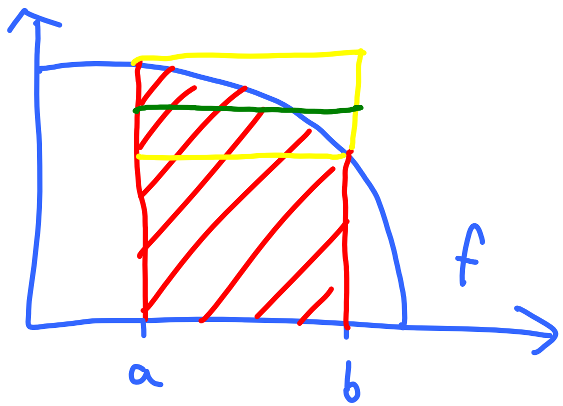
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} k^2 \cdot \frac{b^3}{N^3} = \lim_{N\to\infty} \frac{b^3}{N^3} \sum_{k=1}^{N} k^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{b^3}{N^3} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$= \lim_{N\to\infty} b^3 \cdot \frac{1\cdot(1+1/N)(2+1/N)}{6} = \frac{b^3}{3}$$

Beobachtung: Eine Stammfunktion ist also $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \frac{x^3}{3}$

Damit gilt: $\frac{d}{dx} F(x) = x^2 = f(x)$ … Zufall?

Beobachtung 2:



Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$, sodass der Flächeninhalt des Rechtecks mit Breite $b-a$ und Höhe $f(\xi)$ dem Integral von a bis b entspricht:

$$\exists \xi \in [a,b]: \int_a^b f(x)\,dx = (b-a) \cdot f(\xi)$$

"Mittelwertsatz der Integralrechnung"

Damit: $\frac{d}{dx} F(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(z)\,dz}{h}$

Nutze MWI: $\exists\, \xi_h \in [x, x+h] : \int_x^{x+h} f(z)\,dz = f(\xi_h) \cdot h$

$\longrightarrow \frac{d}{dx} F(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h \cdot f(\xi_h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} f(\xi_h) = f\left(\lim\limits_{h \to 0} \xi_h\right) = f(x)$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\boxed{\frac{d}{dx} \int_a^x f(z)\,dz = f(x)}$$

"Integrieren = Differenzieren rückwärts"

Beispiele:

- $$\int_a^b \sin(x)\,dx = \left(-\cos(x)\right)\Big|_a^b = -\cos(b) + \cos(a)$$

- $$\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b \quad (\text{außer für } n=-1, \text{ sonst } \forall n \in \mathbb{R})$$

- $$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)\Big|_a^b$$

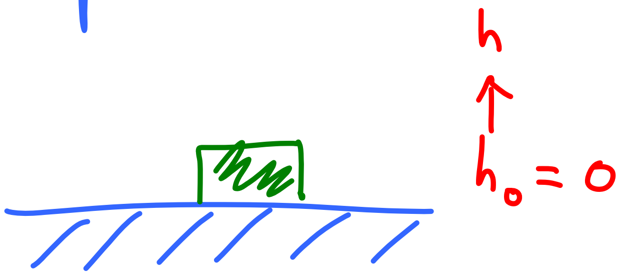
- $$\int_a^b \sinh(x)\,dx = \left(\cosh(x) + 42\right)\Big|_a^b$$

Eine Stammfunktion F zu einer Funktion f ist also eine Funktion, die $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ erfüllt. Hier können wir ein zweites Mal sehen, dass eine Konstante bei der Stammfunktion keine Rolle spielt:

$$\frac{d}{dx}\left(F(x) + c\right) = \frac{d}{dx}F(x) + 0 = f(x)$$

Physikalisches Beispiel: Arbeit = Kraft mal Weg

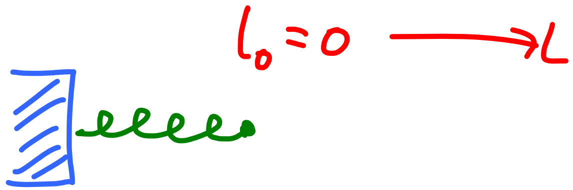
(i) Anheben einer Masse



Gewichtskraft $F_{grav} = \underline{-mg}$ muss überwunden werden, $W = F \cdot h = \underline{mgh}$

$\longrightarrow$ <u>Langweilig</u>

(ii) Auslenken einer Feder



Federspannkraft $F_{spann} = -k \cdot L$ muss überwunden werden: $W \approx F_0 \cdot \Delta l_0 + F_1 \Delta l_1 + \dots$

$$W = \int_{l_0}^{L} F(x)\,dx = \int_0^L kx\,dx = \frac{1}{2} kx^2 \Big|_0^L = \frac{1}{2} kL^2$$

Integrale tauchen in der Physik* an vielen Stellen auf, auch verallgemeinerte Konzepte:

$$\underbrace{\text{Kurvenintegrale, Flächenintegrale, Volumenintegrale,}}_{\to \text{ Physik I}} \quad \underbrace{\text{Pfadintegrale}}_{\to \text{ Master}}$$

Ausblick: Was tun, wenn der Integrand ein Produkt von Funktionen oder eine Verkettung ist?

Antwort: Nicht einfach, aber das sorgfältige Rückwärtslesen der Produkt- und Kettenregel fürs Ableiten hilft weiter.