$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{D}$:

$$f'(x_0) = \underbrace{\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Differenzenquotient}}}_{\text{Differenzialquotient}} = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0) \quad \text{existiert}$$

f differenzierbar für alle $x \in \mathbb{D}$:

$$f' : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \frac{d}{dx} e^x = e^x \qquad \frac{d}{dx} \sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

<u>Ableitungsregeln:</u>

Linearität: 1) $\frac{d}{dx}\left(a\, f(x)\right) = a \frac{d}{dx} f(x) \qquad a \in \mathbb{R}$

2) $\frac{d}{dx}\left(f(x) + g(x)\right) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$

Produktregel: $\frac{d}{dx}\left(f(x)\, g(x)\right) = \left(\frac{d}{dx} f(x)\right) \cdot g(x) + f(x) \cdot \left(\frac{d}{dx} g(x)\right)$

Quotientenregel: $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g(x)^2}$

Kettenregel:

$$(g \circ f)'(x) = \left(g(f(x))\right)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

äußere innere Ableitung

Beweis:

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \; \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}}_{\left(\substack{y = f(x) \\ y_0 = f(x_0)}\right)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)}$$

Grenzwert-satz

$$\underbrace{\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}}_{g'(y_0) = g'(f(x_0))}$$

$$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

✓ $\square$ q.e.d. QED

$$\frac{d}{dx}\, g(\underbrace{f(x)}_{y=f(x)}) \quad = \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{dy}\cdot\frac{df}{dx}$$

$z = g(y)$

$w = h(z)$

$z = g(y)$

$y = f(x)$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = h'(g(f(x)))\cdot g'(f(x))\cdot f'(x)$$

Bsp:

$$\frac{d}{dx}\left(\sin(\underbrace{3x}_{y=f(x)})\right)$$

$y = f(x) = 3x \qquad f'(x) = 3$

$z = g(y) = \sin y \qquad g'(y) = \cos y$

$= \cos(f(x))$

$= \cos(3x)$

$$= g'(f(x))\cdot f'(x) = \cos(3x)\cdot 3$$

Bsp:

$$\frac{d}{dx} e^{\sin x} = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

äußere innere Abl.

Ableitung von Umkehrfunktionen

f^{-1} ist die Umk. fkt. einer Funktion f

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = ?$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx} \left(f(f^{-1}(x)) \right) = 1$$

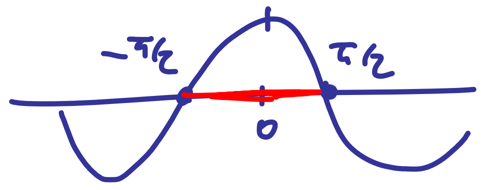
(Anwenden von $\frac{d}{dx}$ auf beide Seiten der Glg.)

$$\Rightarrow \quad f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{{f^{-1}(x)}' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Bsp: $f(x) = e^x \qquad f^{-1}(x) = \ln x$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \quad \checkmark$$



Bsp: $$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Höhere Ableitungen

f diff'bar $\Rightarrow$ $\exists\, f'$

f' diff'bar $\Rightarrow$ $\exists\, f''$

f'' diff'bar $\Rightarrow$ $\exists\, f'''$

$\vdots$

n-te Ableitung von $f: D \to \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)\cdots\left(\frac{d}{dx}\right)}_{n\text{-mal}} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

$$= \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

$$\cancel{\frac{d f^n}{dx^n}(x)}$$

$$f^{(0)}(x) := f(x)$$

$$\cancel{f^{(-1)}(x) = \int f(x)\, dx}$$

Taylor - Entwicklung

viele Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$ lassen sich durch eine Potenzreihe darstellen um den Entwicklungspunkt $x_0 \in D$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n}_{\text{Koeffizienten}} \underbrace{(x-x_0)^n}_{\text{Potenz von } x-x_0}$$

$$= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

$$= \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} a_n (x-x_0)^n}_{b_N(x)}$$

$b_N(x)$ ← Folge für jedes x

Funktionen, die sich als Potenzreihe darstellen lassen, heißen <u>analytisch</u>.

$\rightarrow$ "Funktionentheorie"

$$T_N(x) := \sum_{n=0}^{N} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_N (x-x_0)^N$$

$\rightarrow$ analytische Funktionen lassen sich in der Nähe von x_0 (d.h. für $x \in D$ mit $|x-x_0| \ll 1$) sehr gut durch $T_N(x)$ approximieren

$\rightarrow$ je größer N ist, desto besser ist diese Approximation

z.B. $(x-x_0) = 0.01$

$$(x-x_0)^0 = 1$$
$$(x-x_0)^1 = 0.01$$
$$(x-x_0)^2 = 0.0001$$
$$(x-x_0)^N = 0,\dots\dots 01$$

sin x ist analytisch: $\quad x_0 = 0$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + - \cdots \cdots$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1)\,n$$

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$a_2 = 0$

$a_3 = -\frac{1}{3!}$

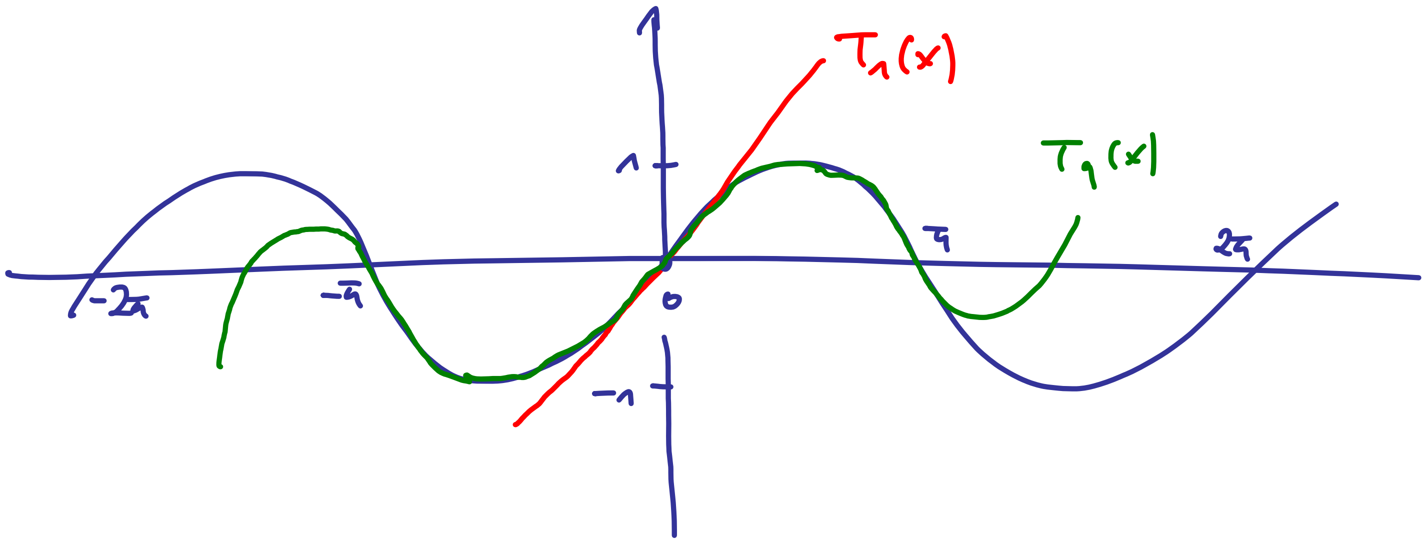
$a_4 = 0$

$a_5 = \frac{1}{5!}$

$\vdots$

$$T_1(x) = x$$

$$T_9(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{9!}x^9$$



Bemerkungen:

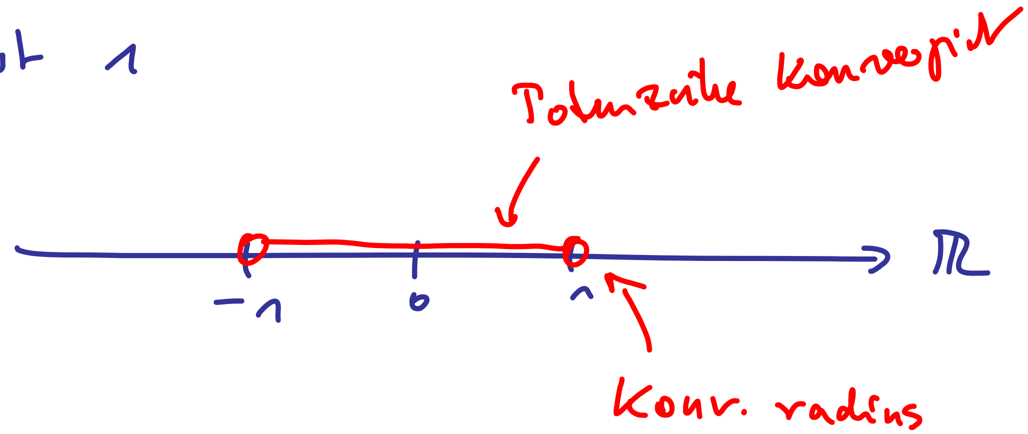
Es gibt Potenzreihen, die gegen die Funktion $f(x)$ nur in einem Bereich konvergieren

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

("geometrische" Reihe)

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert nur für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$

Der Konvergenzradius der Reihe ist 1



Angenommen, f ist analytisch in x_0, dann ist

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Beide Seiten der Gl. Ableiten und dann $x = x_0$ setzen!

Wie bestimmt man die Taylor-Koeffizienten a_n?

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + a_5(x-x_0)^5 + \dots$$

0. Ableitung

$$f(x_0) = a_0$$

1. Ableitung und $x = x_0$

$$f'(x_0) = \Big[a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + 4a_4(x-x_0)^3 + 5a_5(x-x_0)^4 + \dots\Big]_{x=x_0}$$

$$f'(x_0) = a_1$$

2. Ableitung

$$f''(x_0) = \Big[2a_2 + 2\cdot 3\, a_3(x-x_0) + 3\cdot 4\cdot a_4(x-x_0)^2 + 4\cdot 5\, a_5(x-x_0)^3 + \dots\Big]_{x=x_0}$$

$$f''(x_0) = 2a_2$$

3. Ableitung:

$$f'''(x_0) = \left[2\cdot 3\, a_3 + 2\cdot 3\cdot 4\, a_4 (x-x_0) + 3\cdot 4\cdot 5\, a_5 (x-x_0)^2 + \ldots\right]_{x=x_0}$$

$$f'''(x_0) = 2\cdot 3\cdot a_3$$

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = f'(x_0)$$

$$a_2 = \frac{1}{1\cdot 2} f''(x_0)$$

$$a_3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(x_0)$$

$$a_4 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} f''''(x_0)$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} f^{(n)}(x_0)$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$\uparrow \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$\boxed{f(\underline{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot (\underline{x}-x_0)^n}$$

Taylor-Reihe , Taylor-Entwicklung

Bsp: $f(x) = \sin x \qquad x_0 = 0$

$$f^{(0)}(x_0=0) = \sin 0 = 0$$

$$f^{(1)}(0) = \cos x \Big|_{x=0} = 1$$

$$f^{(2)}(0) = -\sin x \Big|_{x=0} = 0$$

$$f^{(3)}(0) = -\cos x \Big|_{x=0} = -1$$

$$\sin x = \frac{1}{0!} f^{(0)}(0)\,(x-x_0)^0 \quad \leftarrow 0$$

$$+ \frac{1}{1!} f^{(1)}(0)\,(x-x_0)^1 \quad \leftarrow x$$

$$+ \ldots \quad \leftarrow 0$$

$$+ \frac{1}{3!} f^{(3)}(0)\,(x-x_0)^3 \quad \leftarrow -\frac{1}{3!} x^3$$

$$+ \ldots$$

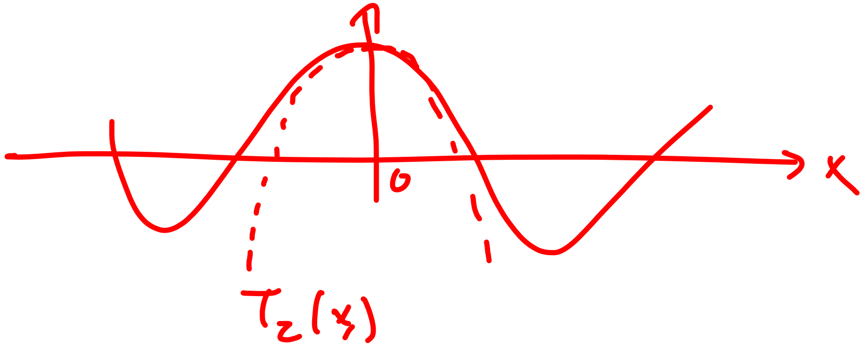
Bsp:

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad x_0 = 0 \qquad \cancel{T_2^{(\cos)}(x)}$$

$$\Rightarrow \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Bsp: $f(x) = \cos x \qquad x_0 = 0$

$$\cos x = \underbrace{1 - \frac{1}{2} x^2}_{T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2} + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \frac{1}{8!} x^8 - \dots$$

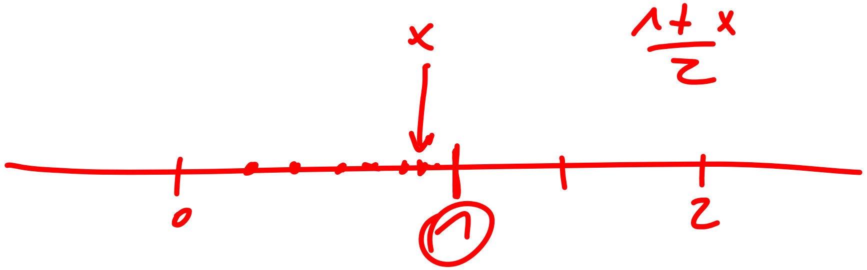


Bsp $f(x) = \sin x \qquad T_1(x) = x$

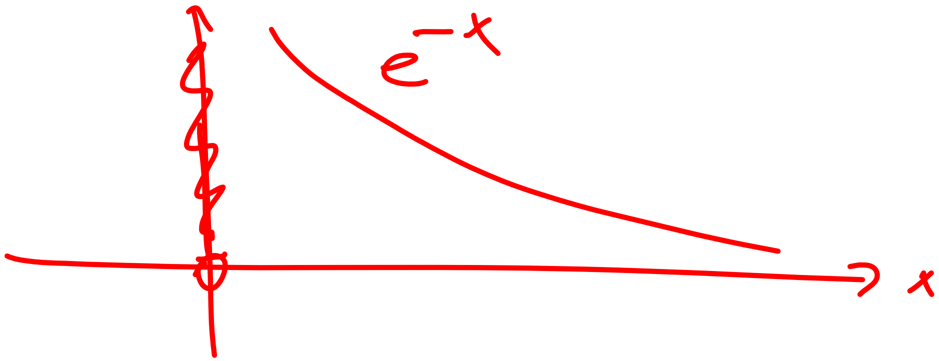
$$= x - \frac{1}{3!} x^3 + $$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

$\frac{1+x}{2}$



$0.\overline{9} = 1$



$$\underbrace{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{9}{10}\right)^n}$$

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1/10} = 10$$

$x = 9/10$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0 \notin f(\mathbb{R})$$

n gerade $\Leftrightarrow$ n^2 gerade

$\Rightarrow$ ✓