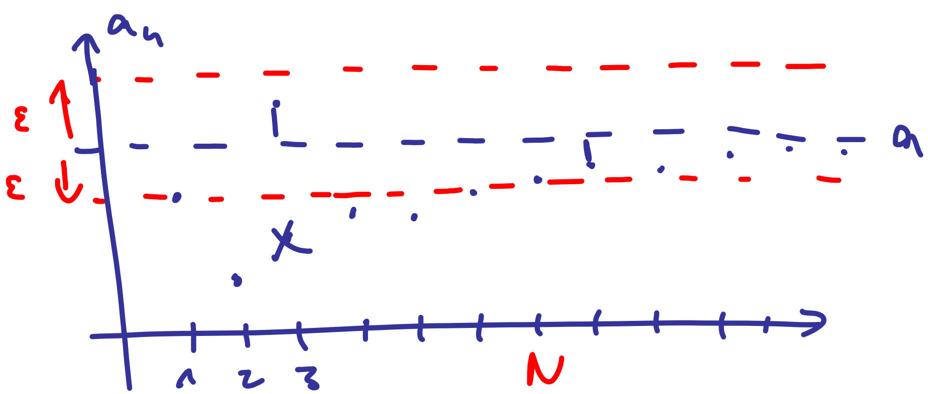
$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto f(n) = a_n$$

heißt (reelle) Folge



$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ← Grenzwert von (a_n)

↑ Folgenglieder

falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N: \ |a_n - a| < \varepsilon$$

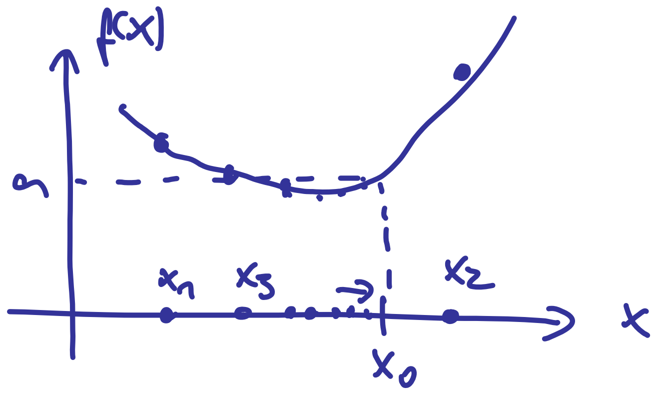
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{(n-2)} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}$ nicht konvergent
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a/b \quad (b \neq 0)$

falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

Grenzwerte von Funktionen

- sei $f: D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$
- betrachte Folge (x_n) mit $x_n \in D$, $n \in \mathbb{N}$, und

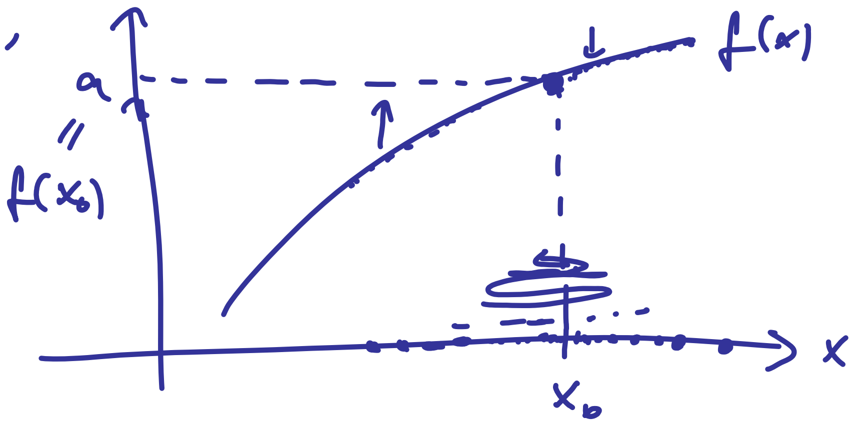
  $$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$



- $(f(x_n))$ ist die Folge der Funktionswerte

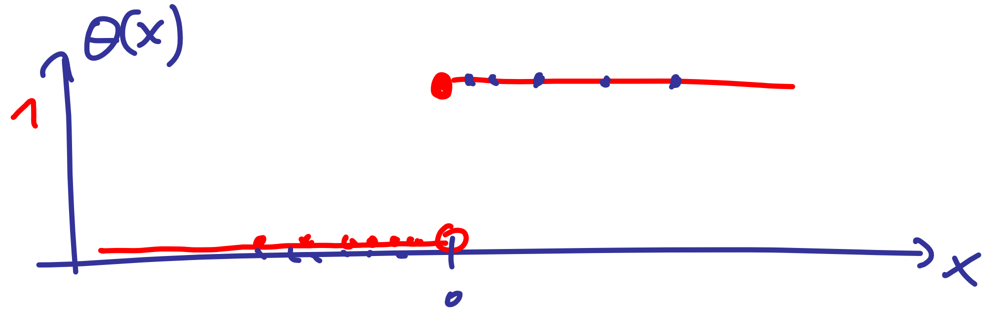
Def.: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ den Grenzwert a, falls für alle Folgen (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$



Bsp: $f(x) = \Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

betrachte $x_0 = 0$

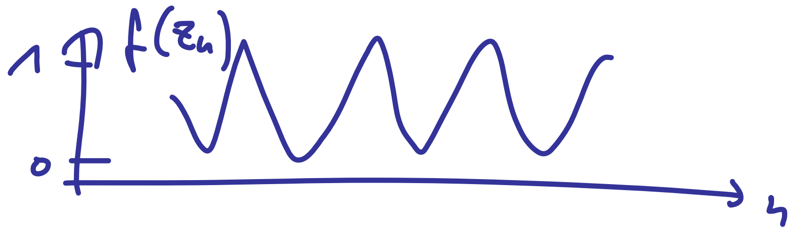


(i) $x_n = \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ $\qquad f(x_n) = f(1/n) = \Theta(1/n) = 1$

$\neq$?

(ii) $y_n = -\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ $\qquad f(y_n) = f(-1/n) = \Theta(-1/n) = 0$

(iii) $z_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$



$(f(x_n))$ divergent !

$f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{D}$, dann gilt

f ist stetig an x_0 $\iff$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ für alle Folgen (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \in \mathbb{D}$

(Alternative Def. der Stetigkeit zu dem ε-δ-Kriterium)

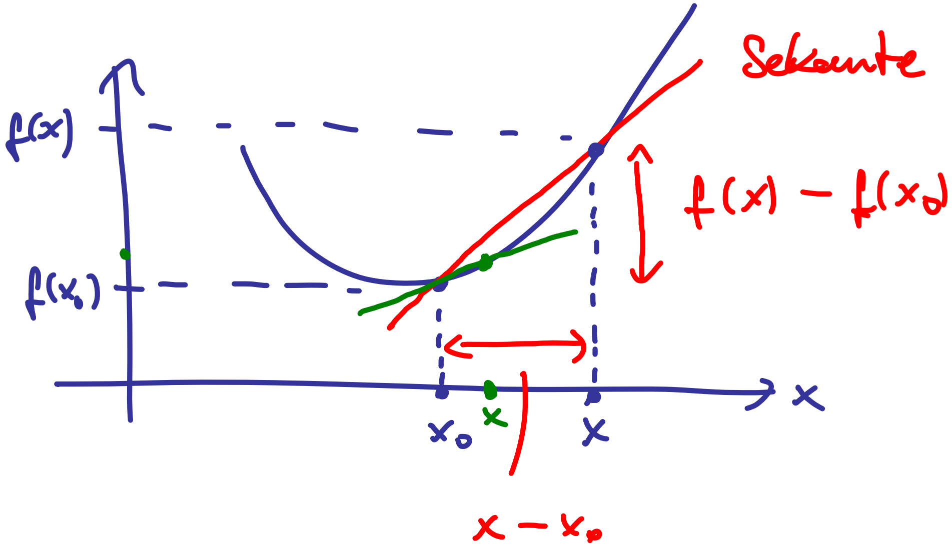
Falls $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$ für alle (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

dann schreibt man

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = a}$$

② Differenzialrechnung

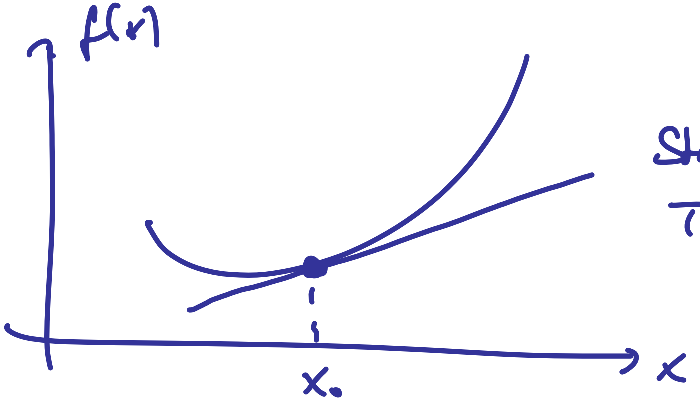
$f: D \to \mathbb{R}$



Sekante, Gerade durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$

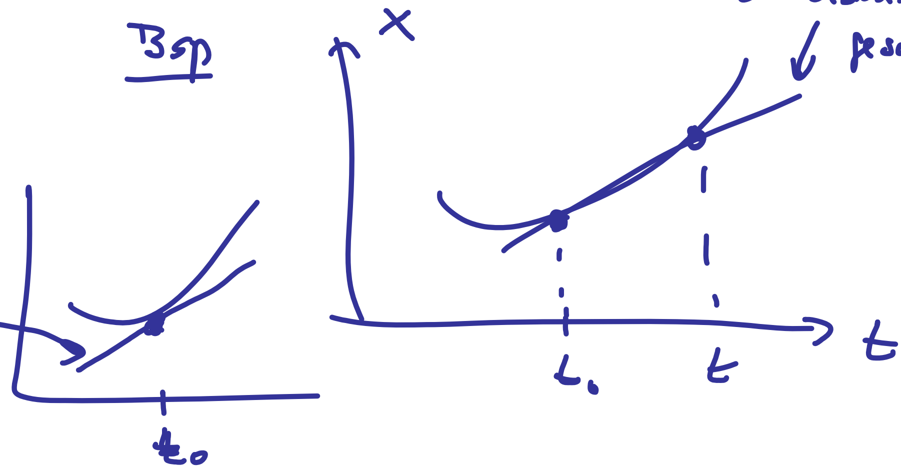
Steigung der Sekante ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Steigung der Tangente?

Bsp



Steigung = Durchschn. geschw.

Steigung = momentane Geschw.

Def:

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ liegt im Punkt $x_0 \in D$ <u>differenzierbar</u>, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existiert}$$

Falls der Grenzwert existiert, wird er bezeichnet mit:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$$

Ableitung von f in x_0, "df nach dx bei x_0", <u>"df durch dx"</u>

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{Differenzenquotient}$$

$$\frac{df}{dx}(x_0) \quad \text{Differenzialquotient} \quad = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

alternativ!

$$x = x_0 + \Delta x \qquad x = x_0 + h$$

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

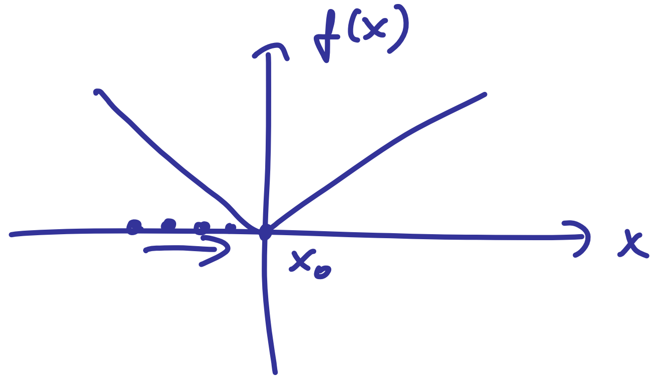
$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, wenn sie an jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{D}$ diff'bar

Dann existiert

$$f' : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \quad x_0 \mapsto f'(x_0)$$

besser:

$$f' : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$



Gegenbeispiel

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = |x|$

f ist nicht diff'bar in $x_0 = 0$

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \overbrace{\frac{-x}{x}}^{-1} = -1$$

$x < 0$

$\Rightarrow |x| = -x$

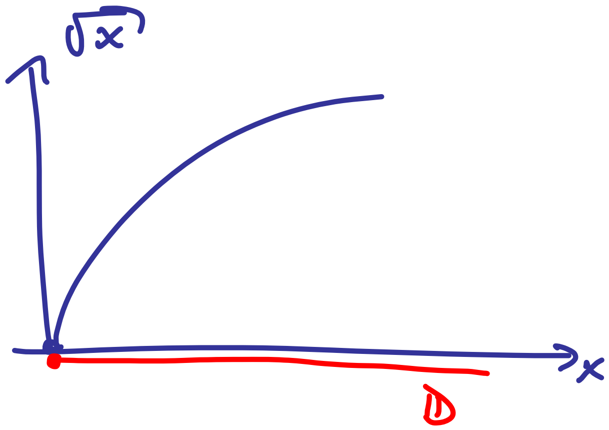
Folgen mit $x < x_0$, die gegen x_0 konvergieren

$\neq$

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

Bsp: $f : \mathbb{R}_{+,0} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$



$x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} \overset{"}{=} \infty"$$

$\Rightarrow$ f ist nicht diff'bar in $x_0 = 0$!

$$\boxed{f \text{ diff'bar} \Rightarrow f \text{ stetig}}$$

$\not\Leftarrow$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$ Stetigkeit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$ Diff'barkeit

Ableitungen einfacher Funktionen

- $f(x) = x^2, \quad x_0 \in \mathbb{R}$

$$(x - x_0)(x + x_0) = x^2 - x_0^2$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}}$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = \lim_{x \to x_0} x + \lim_{x \to x_0} x_0 = \underbrace{x_0 + x_0}_{= 2x_0}$$

$$f'(x_0) = 2x_0 \qquad f'(x) = 2x$$

- x^α $\quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \qquad f(x) = x^\alpha$

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \frac{d(x^\alpha)}{dx} = f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (x > 0, \text{ falls } \alpha < 1)$$

- $f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

- $f(x) = \sin x \quad = \cos x$
- $f(x) = \cos x \quad = -\sin x$

Ableitungsregeln

$$(3x)' = 3x' = 3$$

- $$\frac{d}{dx}(a\, f(x)) = a \cdot \frac{d}{dx} f(x)$$
- $$\frac{d}{dx}\left(f(x) + g(x)\right) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

Bsp:

$$\underline{\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right)} = \frac{d}{dx}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N\right)$$

$$= \frac{d}{dx} a_0 + \frac{d}{dx}(a_1 x) + \frac{d}{dx}(a_2 x^2) + \dots + \frac{d}{dx}(a_N x^N)$$

$$= 0 + a_1 \frac{d}{dx} x + a_2 \frac{d}{dx}(x^2) + a_3 \cdot \frac{d}{dx} x^3$$

$$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + a_N N x^{N-1}$$

$$= \underline{\sum_{n=0}^{N} a_n n x^{n-1}}$$

- Produktregel

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\,g(x)\right) = \frac{df}{dx}(x)\cdot g(x) + f(x)\,\frac{dg(x)}{dx}$$

$$\left((fg)' = f\,g' + f'g \right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\,g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x_0) + f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\left(g(x) - g(x_0)\right) + \left(f(x) - f(x_0)\right)\cdot g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot g(x_0)$$

$$= f(x_0)\cdot g'(x_0) + f'(x_0)\,g(x_0)$$

Bsp: $f(x) = x^2 \cdot \sin x \cdot e^x$

$$f'(x) = 2x \cdot \sin x \cdot e^x + x^2 \cdot \cos x \cdot e^x + x^2 \sin x \cdot e^x$$

$$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$$