$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

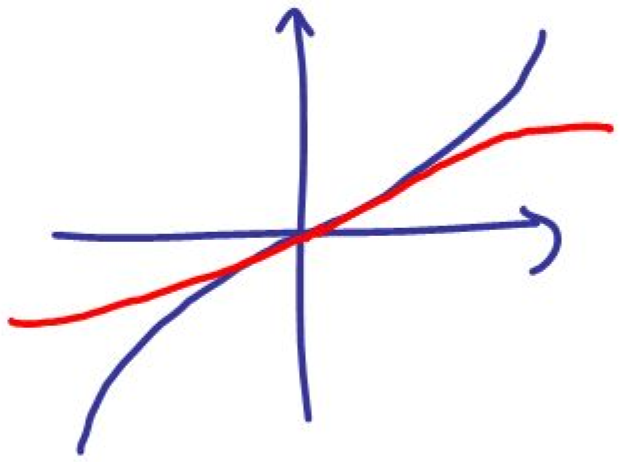
$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

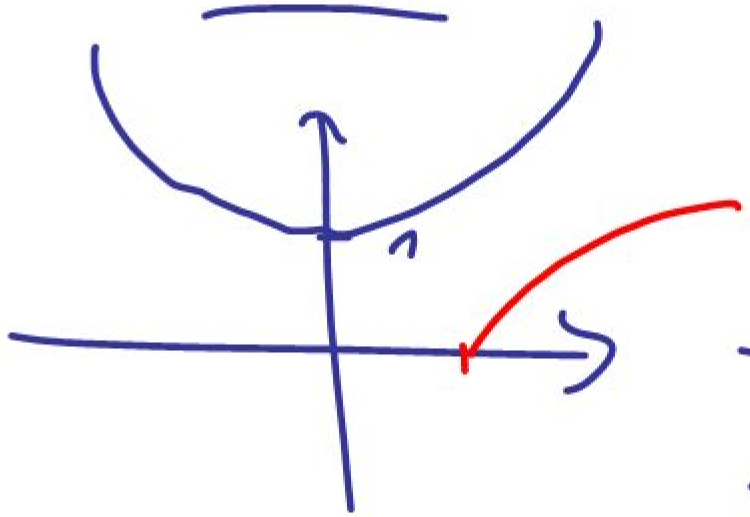
$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

<u>$\sinh x$</u>

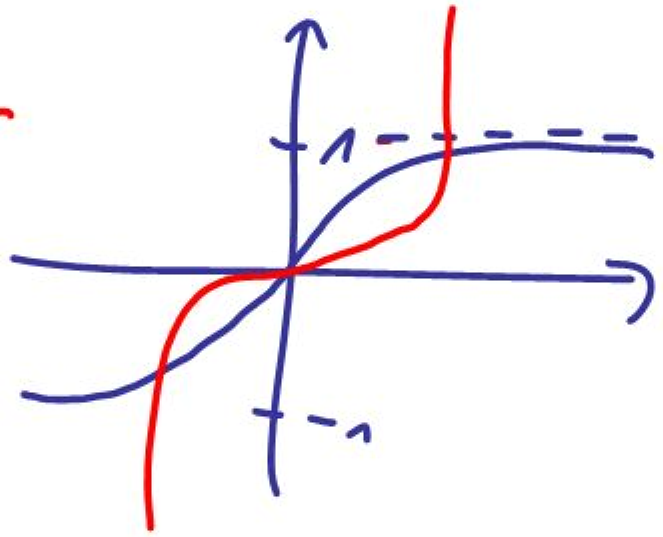
$\operatorname{arsinh} x$



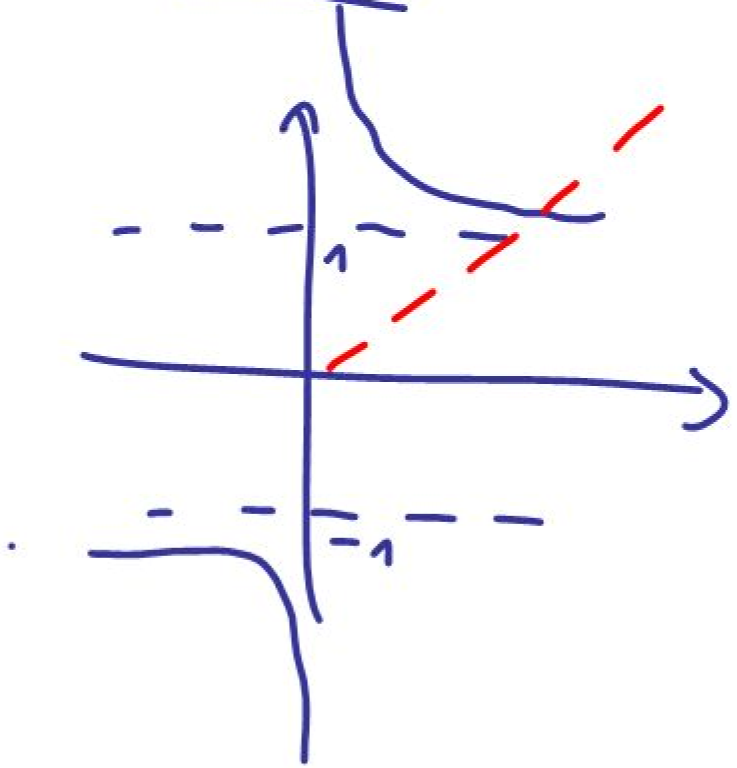
<u>$\cosh x$</u>



<u>$\tanh x$</u>



<u>$\coth x$</u>



$f(\mathbb{D}) = \mathbb{R}$

$f(\mathbb{D}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

$f(\mathbb{D}) = [-1, 1]$

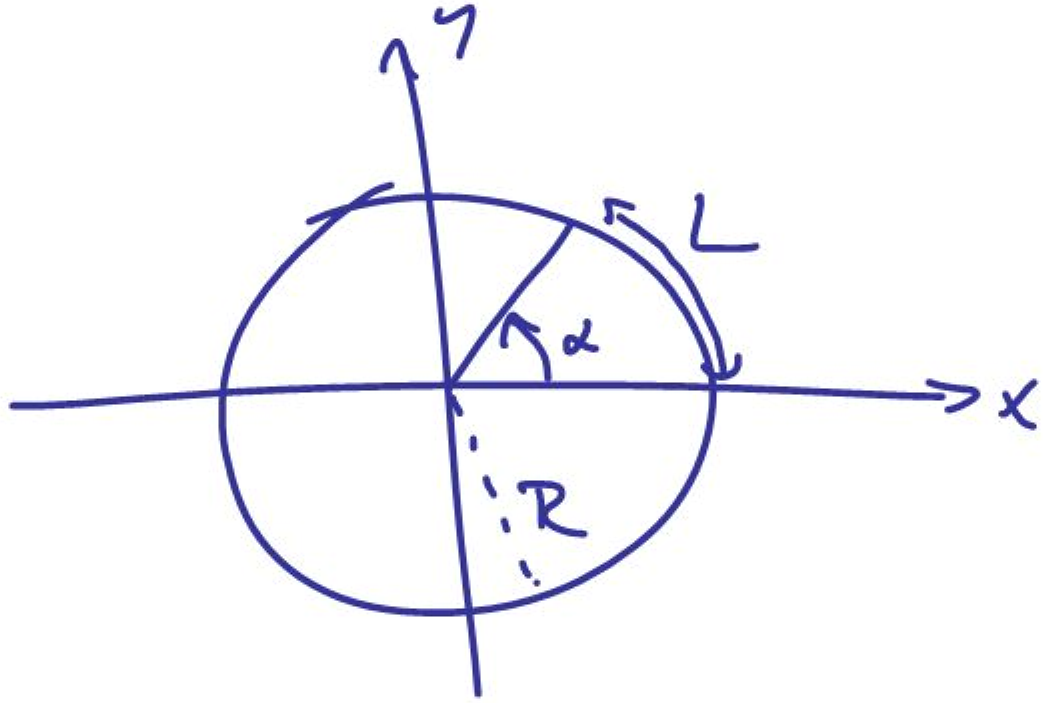
$f(\mathbb{D}) =]1, \infty[\; \cup \;]-\infty, -1[$

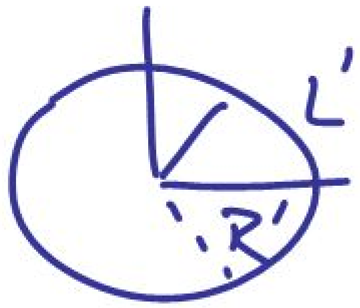
<u>Umkehrfunktionen</u>

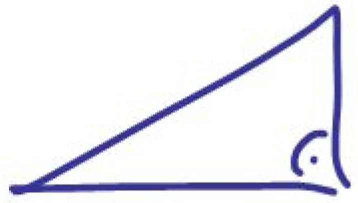
Areafunktionen

Trigonometrische Funktionen

Wenn nichts anderes vereinbart ist, werden Winkel im Bogenmaß gemessen!







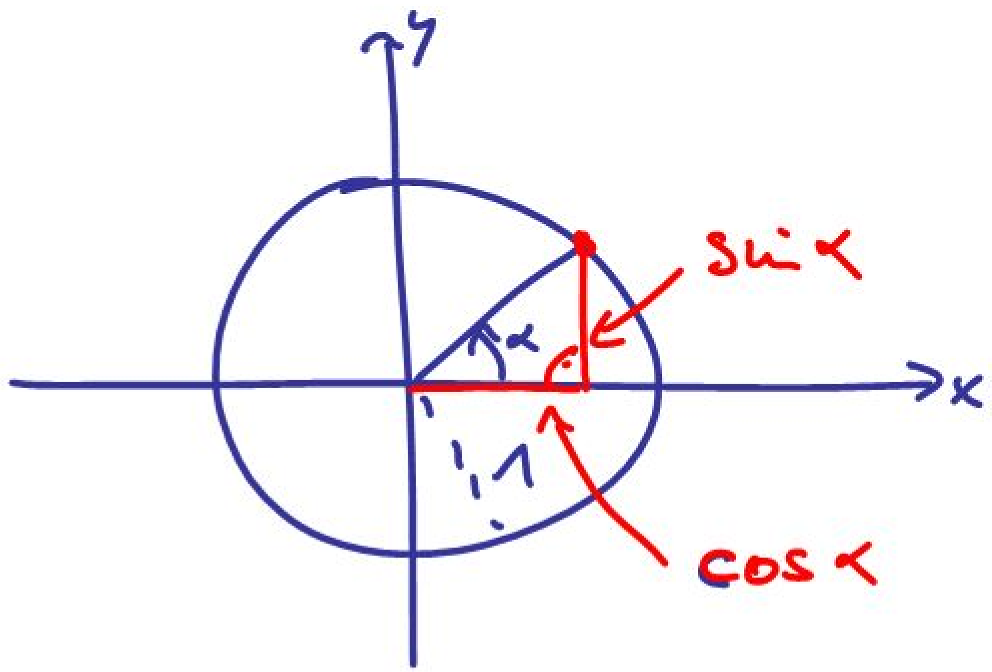
$$\alpha \text{ (in Bogenmaß)} = 2\pi \cdot \frac{\alpha \text{ (in Grad)}}{360^\circ} = \frac{L}{R} = \frac{L'}{R'}$$

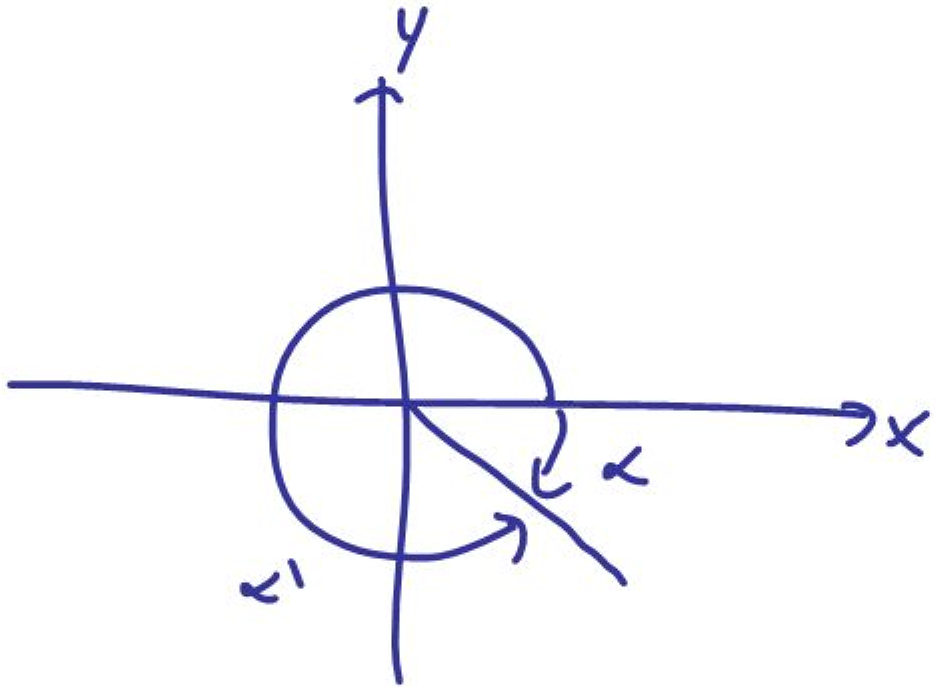
α (in Bogenmaß)	α (in Grad)
2π	360°
π	180°
$\pi/2$	90°

Sinus und Cosinus

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

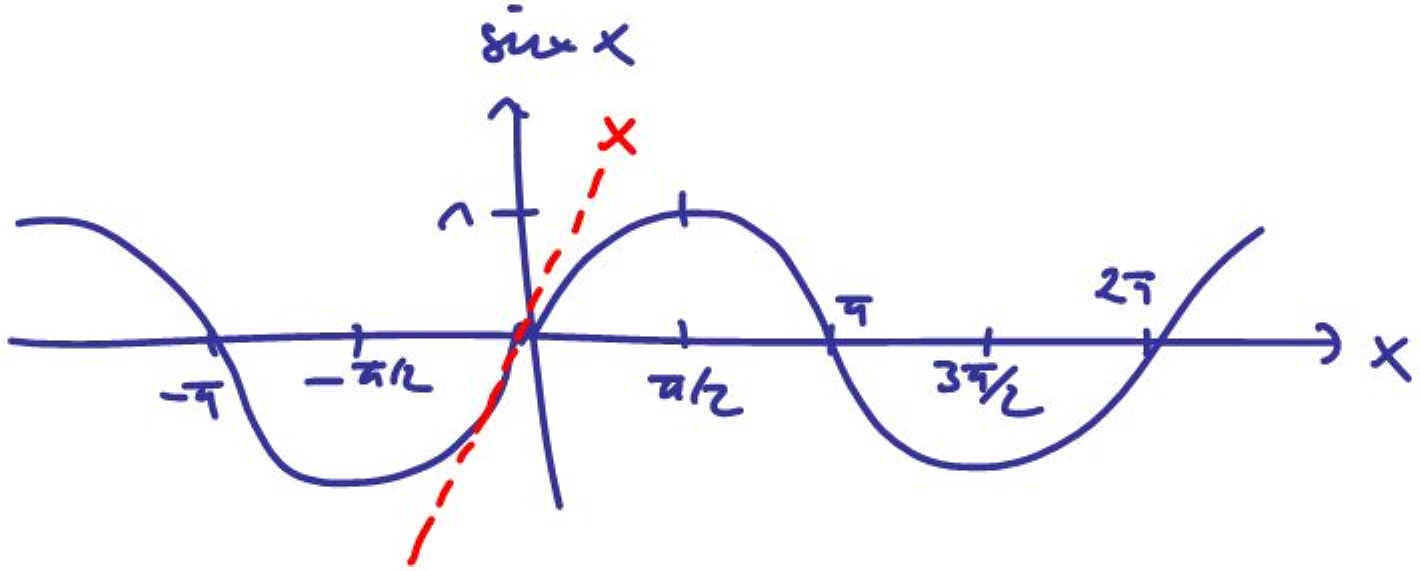
$$\left(\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2 \right)$$





$$\alpha = -\frac{\pi}{4}$$

$$\alpha' = \frac{7}{4}\pi = \frac{7}{8} \cdot 2\pi$$



$\sin(x+2\pi) = \sin x$

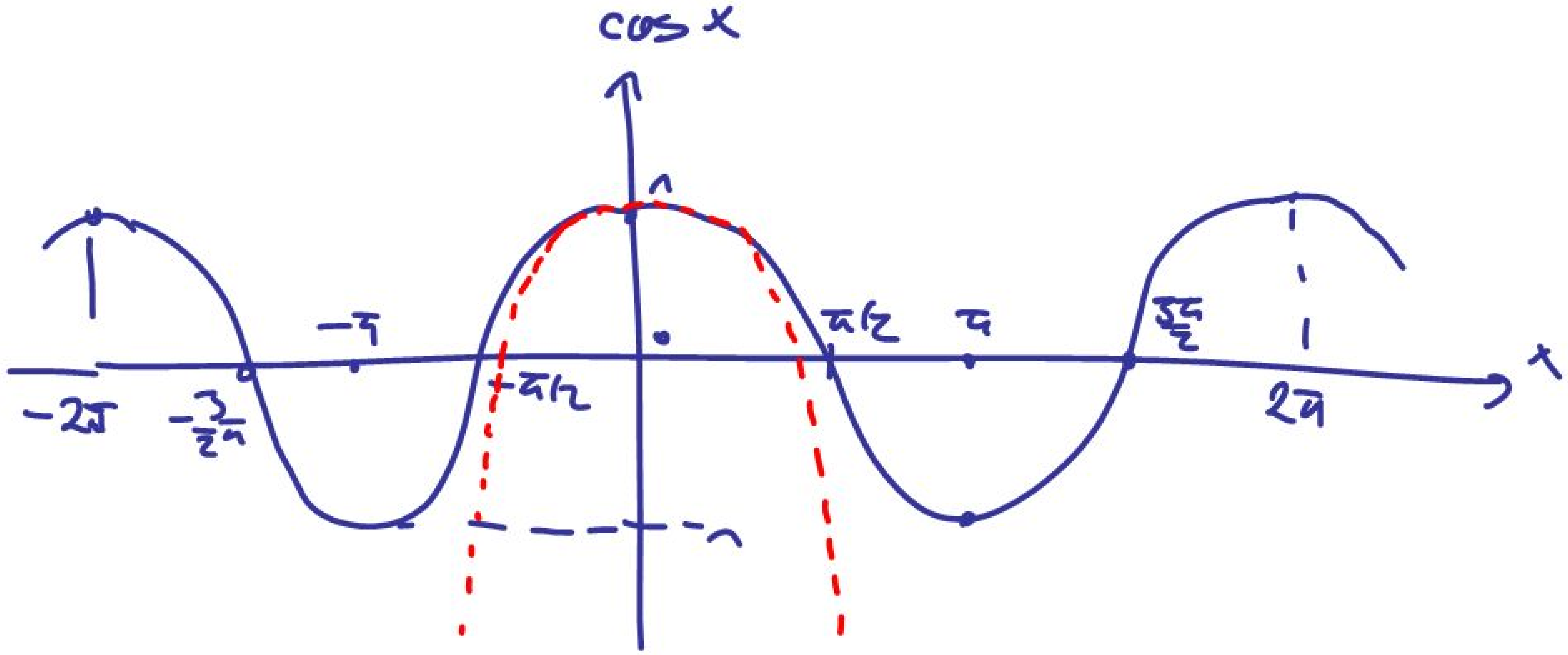
$D = \mathbb{R} \quad f(D) = [-1, 1]$

$N_{\sin} = \{ k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Kleinwinkelnäherung

$\sin x \approx x$ für $|x| \ll 1$

wichtig: x im Bogenmaß!



$\cos(x+2\pi) = \cos x$

$D = \mathbb{R} \quad f(D) = [-1, 1]$

$N_{\cos} = \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

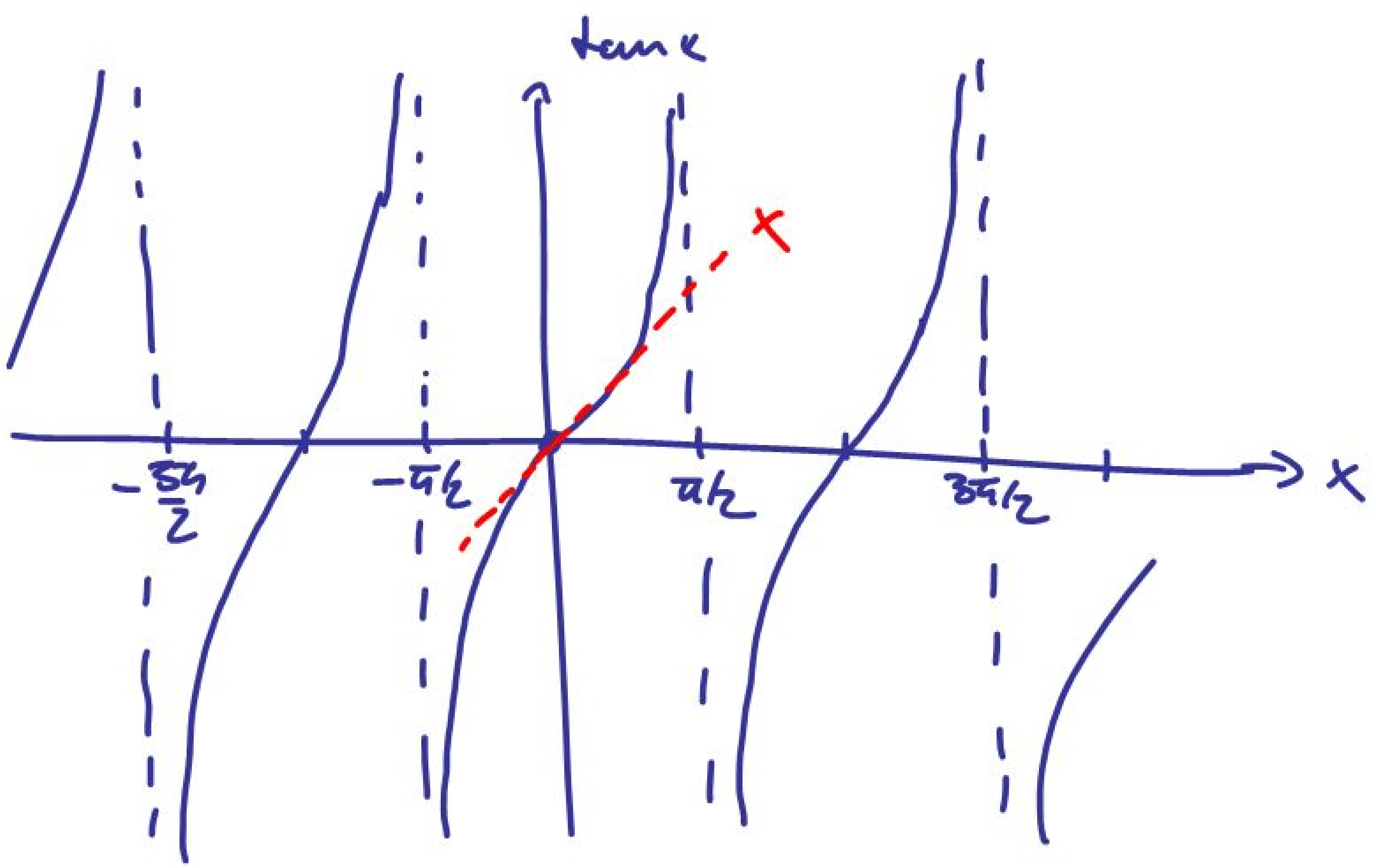
$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ für $|x| \ll 1$

Tangens und Cotangens

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan x \approx \frac{x}{1 - \cancel{\frac{x^2}{2}}} \approx x$$

$|x| \ll 1$

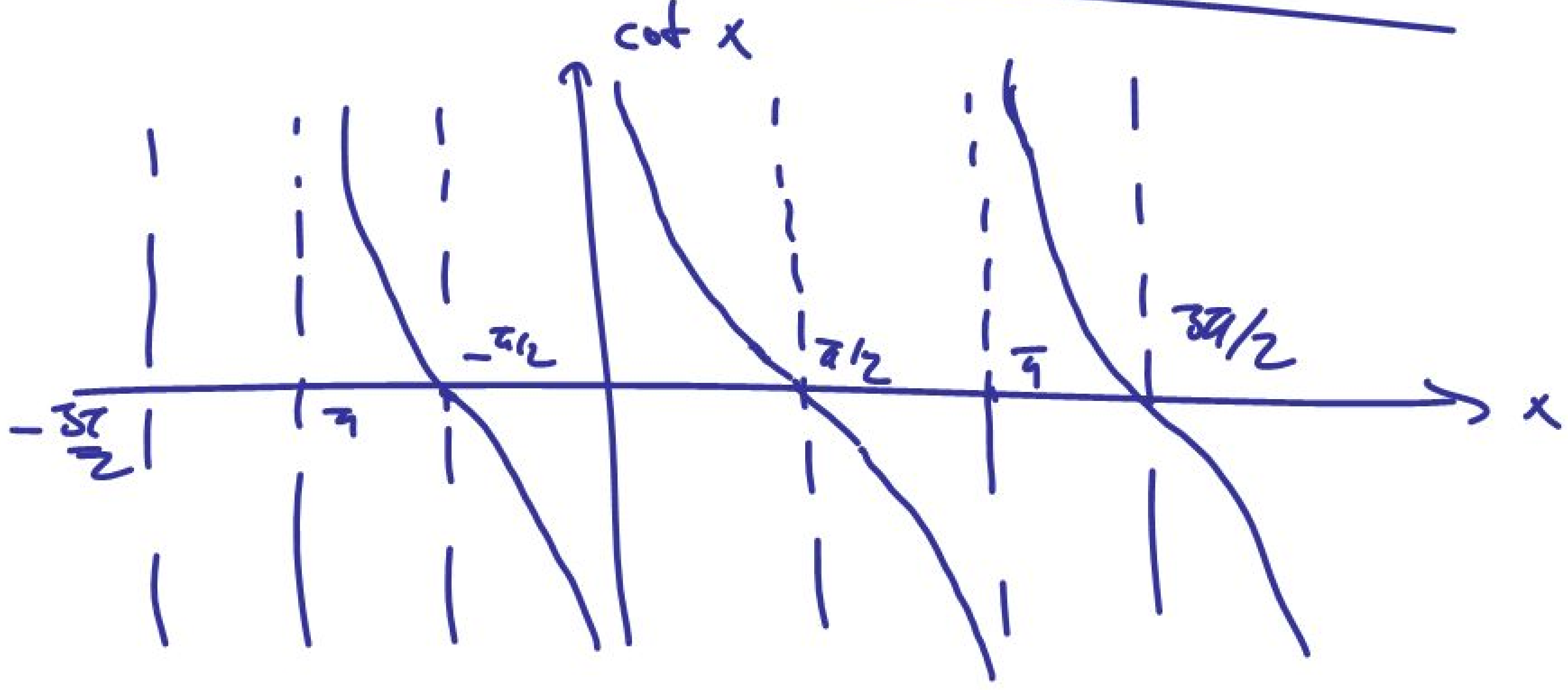


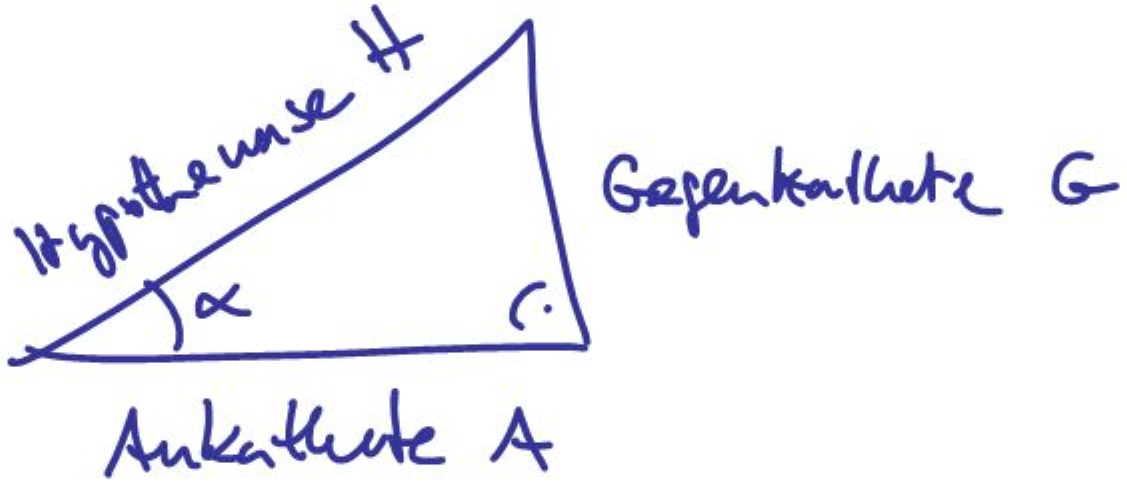
$\tan x \approx x$ für $|x| \ll 1$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\tan(x+\pi) = \tan x$$

$$\cot(x+\pi) = \cot x$$





$$\sin \alpha = \frac{G}{H}$$

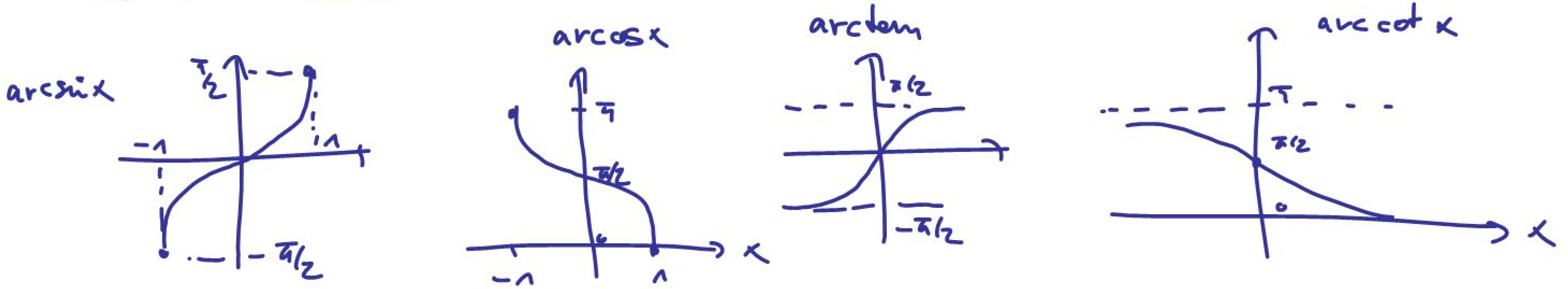
$$\cos \alpha = \frac{A}{H}$$

$$\tan \alpha = \frac{G}{A}$$

$$\cot \alpha = \frac{A}{G}$$

Umkehrfunktionen

$$\sin^{-1} x = \arcsin x$$
$$\cos^{-1} x = \arccos x$$
$$\tan^{-1} x = \arctan x$$
$$\cot^{-1} x = \operatorname{arccot} x$$



1.5 Grenzwerte von Folgen und Funktionen

(reelle) Folgen:

Eine reelle Folge ist eine geordnete Liste von reellen Zahlen: (a_n)

$n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$

$n = 1$	$a_1 = 7$
$n = 2$	$a_2 = 1$
3	$a_3 = 4$
4	$a_4 = -7$
$\vdots$	$\vdots$

a_n ← Folgenglied

↑

Index

Bsp

$a_3 = 1$

$a_4 = -1$

$a_5 = 1$

$a_6 = -1$

$\vdots$

ODER

Eine Folge ist eine Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto f(n) = a_n$$

↗ n

Bsp:

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$

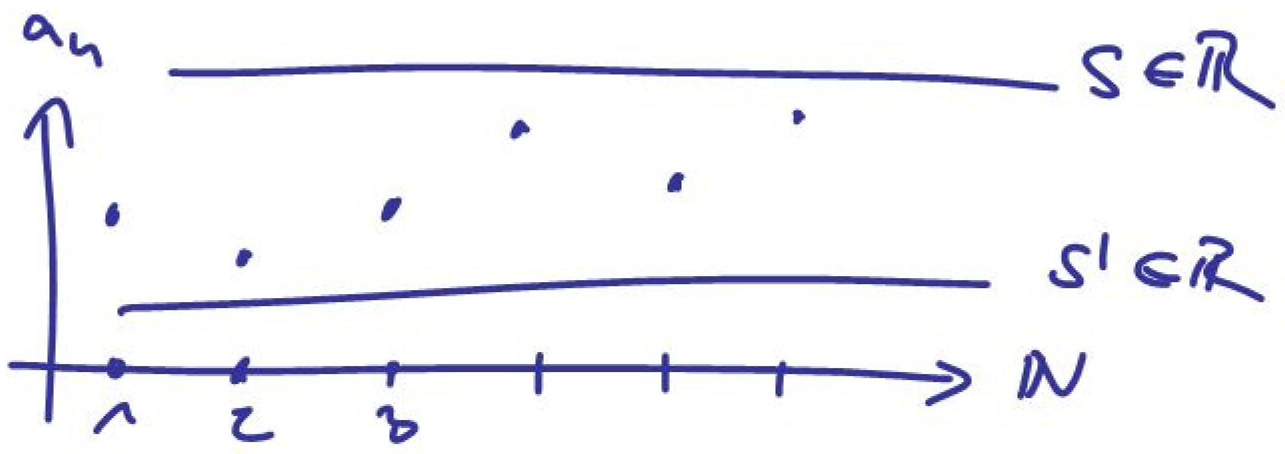
$a_3 = 3$

$\vdots$

Eine Folge (a_n) heißt

nach $\begin{cases} \text{oben} \\ \text{unten} \end{cases}$ beschränkt, falls es ein $S \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$\begin{cases} a_n \leq S \\ a_n \geq S \end{cases}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

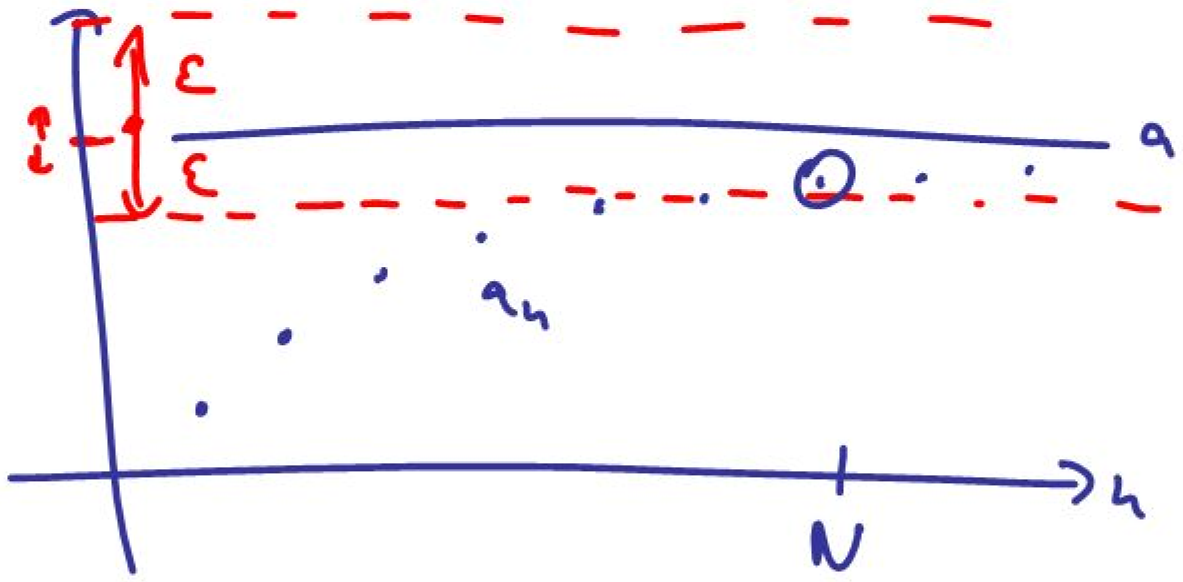


Eine Folge (a_n) heißt

$\begin{cases} \text{(streng) monoton steigend} \\ \text{(streng) monoton fallend} \end{cases}$

falls $\begin{cases} a_n \leq a_{n+1} & (a_n < a_{n+1}) \\ a_n \geq a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$

Konvergenz von Folgen



Def.: Eine Folge (a_n) heißt konvergent, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft, dass

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N.$$

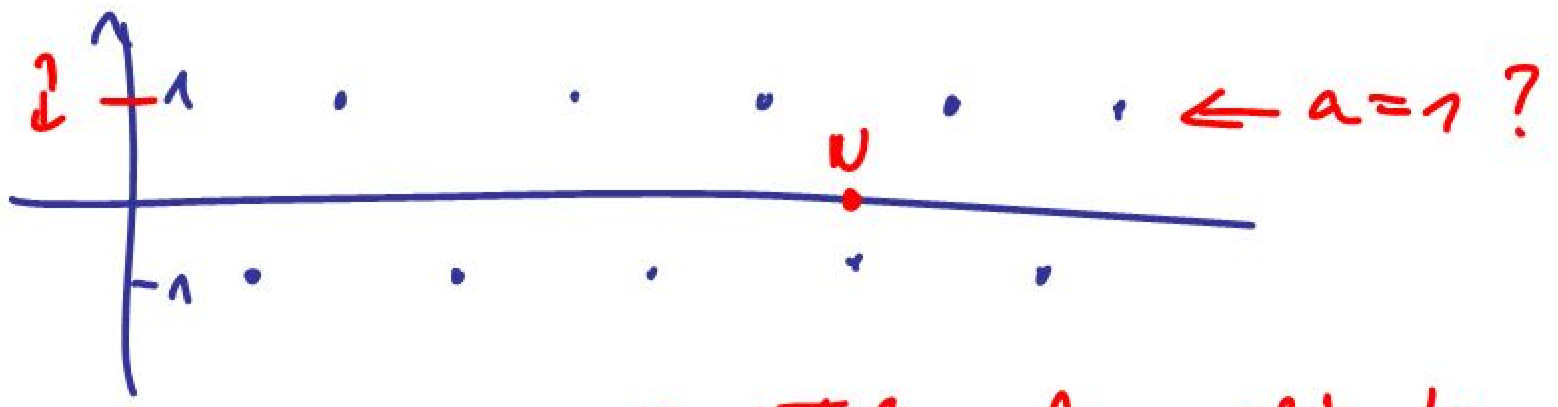
a heißt dann der Grenzwert der Folge (a_n)
der Limes

Man schreibt

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = a} \quad \text{oder} \quad \boxed{a_n \xrightarrow{n \to \infty} a}$$

$a_n \nearrow$ ———— S

$a_n = (-1)^n$



→ Folge ist nicht konvergent

→ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ist nicht definiert

→ (a_n) divergiert

Bsp: $a_n = (-1)^n e^{-n}$