Wdh.: Potenzfunktionen

$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}$, gerade $\qquad f^{-1}(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad (x \geq 0)$

$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}$, ungerade $\qquad f^{-1}(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad (x \in \mathbb{R})$

$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}$, gerade $\qquad f^{-1}(x) = x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \qquad (x > 0)$

——— n ——— ungerade $\qquad$ ——— n ——— $\qquad (x \in \mathbb{R})$

Gebrochene Potenzen!

$$f(x) = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n \qquad f^{-1}(x) = x^{\frac{m}{n}} \qquad (x > 0)$$

$$= \left(x^n\right)^{1/m} = \left(x^{1/m}\right)^n = x^{\frac{1}{m} \cdot n}$$

Polynom-Funktionen

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_N(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + a_{N-2} x^{N-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$N \in \mathbb{N}$ $\quad a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ Koeffizienten des Polynoms

N heißt Grad des Polynoms

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i$$

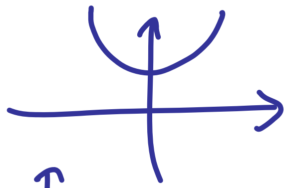
$$\sum_{n=0}^{3} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$2x^3 + 5 = \sum_{n=0}^{3} (\dots) \qquad a_0 = 5,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 2$$

Eigenschaften

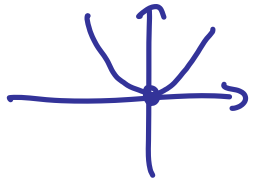
- Polynome sind (überall) stetig
- Polynom vom Grad N hat höchstens N Nullstellen $(N \neq 0)$

$f(x) = x^2 + 1$



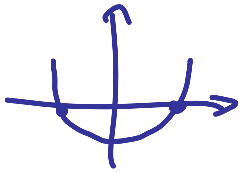
$N_f = \emptyset$

$f(x) = x^2$



$N_f = \{0\}$

$f(x) = x^2 - 1$



$N_f = \{-1, 1\}$

- Besitzt ein Polynom vom Grad N genau N Nullstellen, dann faktorisiert es:

$x_1, x_2, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$

$$f(x) = a_N (x - x_N)(x - x_{N-1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_1)$$

$$N_f = \{x_1, \ldots, x_N\}$$

Bsp: $f(x) = x^2 - 1 = 1 \cdot (x-1)(x+1)$ ✓ 3. binomische Formel

- Existiert eine Faktorisierung der Form

$$f(x) = (x - x_0)^k \cdot (\text{Rest-Polynom})$$

so heißt $x_0 \in \mathbb{R}$ eine <u>k-fache</u> Nullstelle $(k \in \mathbb{N})$

Bsp: $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1)$

$$= (x-0)^2 \underbrace{(x^2 - 2x + 1)}_{(x-1)^2}$$

$x_0 = 0$ ist zweifache (doppelte) Nullstelle

$x_1 = 1$ —— " ——

$$(x - x_0)^2 \cdot (x - x_1)^3 = f(x) \quad \text{vom Grad } 5$$

(Gebrochen) rationale Funktionen

seien $g(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ ein Polynom N-ten Grades

und $h(x) = \sum_{m=0}^{K} b_m x^m$ ein Polynom K-ten Grades

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_N x^N}{b_0 + b_1 x + \dots + b_K x^K}$$ rationale Funktion

$D_f = \mathbb{R} \setminus N_h \qquad N_h = \{ x \in \mathbb{R} \mid h(x) = 0 \}$

- Bsp: $f(x) = \frac{2x-1}{3x^2+5} \qquad D_f = \mathbb{R}$

- Bsp: $f(x) = \frac{1}{x} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$

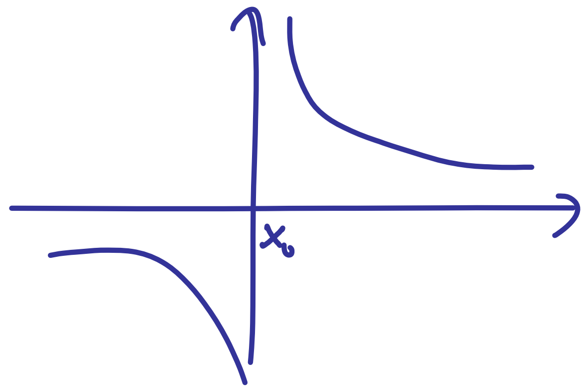
- $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$

Polstellen

x_0 heißt eine Polstelle von f, wenn

1) x_0 eine Nullstelle von h ist, d.h. wenn x_0 eine Definitionslücke
2) der Betrag $|f(x)|$ gegen ∞ strebt, falls x sich x_0 annähert

Bsp: $\quad f(x) = \frac{1}{x} \qquad x_0 = 0$



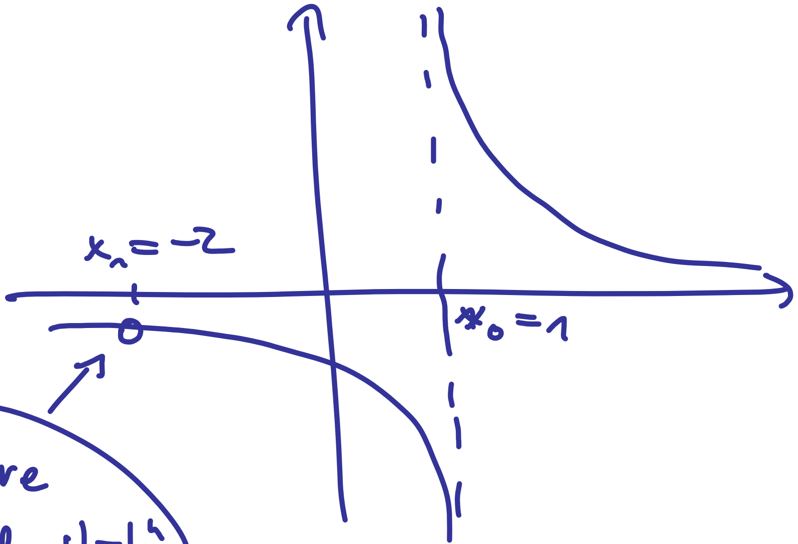
Bsp:

$$f(x) = \frac{2x+4}{x^2+x-2}$$

$$x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$$

$x_0 = 1$ $\quad N_h = \{1,-2\}$

$x_1 = -2$



"hebbare Singularität"

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1,-2\}$$

$$\frac{2x+4}{x^2+x-2} = \frac{2\cancel{(x+2)}}{(x-1)\cancel{(x+2)}} = \frac{2}{x-1} =: \tilde{f}(x)$$

$$D_{\tilde{f}} = \mathbb{R} \setminus \{1\} \qquad f(x) = \tilde{f}(x) \quad \forall\, x \in D_f$$

• <u>Bsp:</u> $f(x) = \frac{x^2}{x}$ $\qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^\times$

$$= x \quad \forall x \neq 0$$

$$=: \tilde{f}(x)$$

$$f(x) = \tilde{f}(x) \quad \forall x \neq 0$$

$x_0 = 0$ ist eine hebbare Singularität

Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \exp(x) = e^x \qquad e \in \mathbb{R} \quad \text{Eulersche Zahl}$$

$$e = 2{,}718281\ldots$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \;, \; n \in \mathbb{N}$

alternative Def.

$$e^x = \exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$$
$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots = \underbrace{2 + \frac{17}{24}}_{2{,}708333\ldots} + \ldots$$

$$(e^x)' = \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots\right)'$$

$$= 0 + 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots = e^x$$

$0! := 1$

$1! = 1$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Eigenschaften

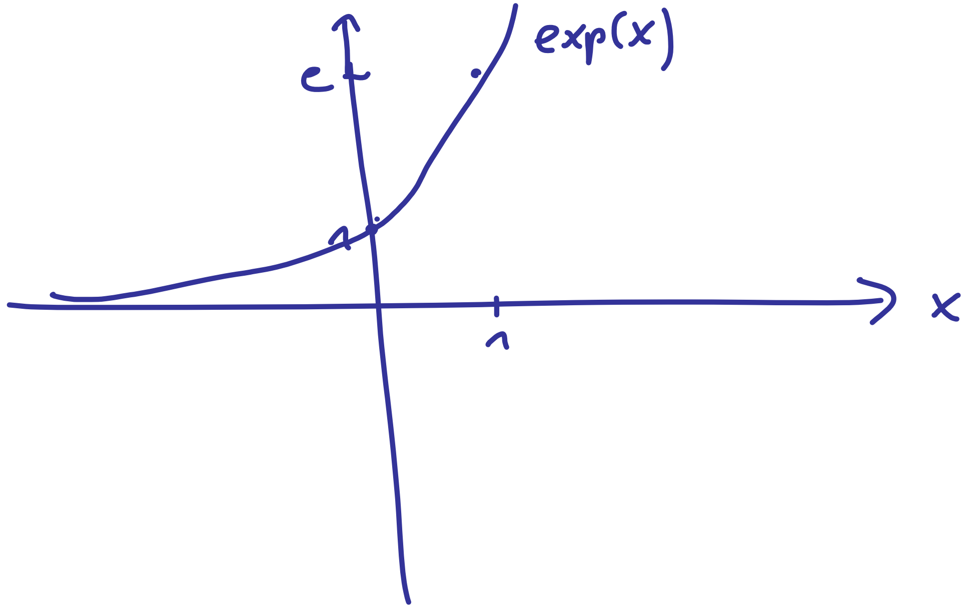
$\exp(0) = e^0 = 1$

$e^1 = e$

$e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\exp(x_1 + x_2) = \boxed{e^{x_1+x_2} = e^{x_1}\cdot e^{x_2}}$

$\exp(x) = e^x > 0$



$D_{\exp} = \mathbb{R}$

e^x wächst für $x \to \infty$ schneller als jede Potenz von x

$$\frac{e^x}{x^n} \to \infty \quad \text{für } x \to \infty \qquad \text{egal für welches } n \in \mathbb{N}!$$

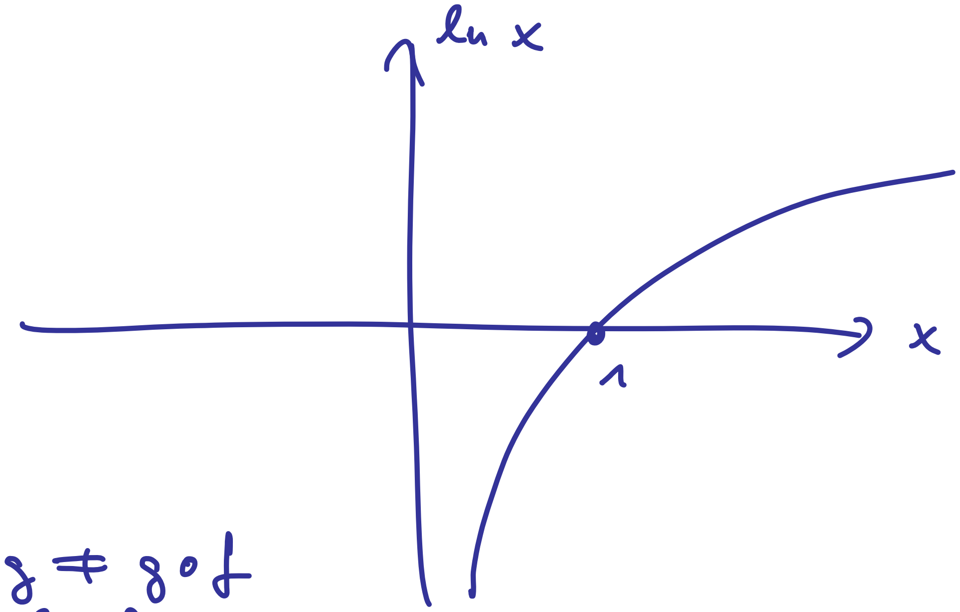
$f \quad f^{-1}$

Umkehrfunktion:

$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \mapsto \ln x = \exp^{-1}(x) \neq \frac{1}{\exp(x)} = \exp(x)^{-1}$$

$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$\ln$: natürlicher Logarithmus



Eigenschaften

- $e^{\ln x} = x = \ln e^x$

($f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$, aber $f \circ g \neq g \circ f$ i. allg.)

- $\ln 1 = 0$ denn $e^0 = 1$
- $\ln e = 1$ denn $e^1 = e$
- $\ln \frac{1}{e} = -1$
- $\ln x^a = a \cdot \ln x$
- $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
- $\ln(x_1 + x_2) = \ln(x_1 + x_2)$ keine Vereinfachung möglich
- $\boxed{\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2}$
- $\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln\left(x_1 \frac{1}{x_2}\right) = \ln x_1 + \ln \frac{1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2$
- $\ln x^a = a \ln x$ $\quad \left(\ln(x^2) = \ln(x \cdot x) \underset{x>0}{=} \ln x + \ln x = 2 \ln x \right)$

  $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$
- $\ln$ ist streng mon. steigend

$\boxed{\exp(x_1 + x_2) = \exp x_1 \cdot \exp x_2}$

$\exp(x_1 \cdot x_2) = (\exp x_1)^{x_2} = (\exp x_2)^{x_1}$

- ln wächst schwächer als jede Wurzel für $x \to \infty$

$$\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} \xrightarrow{x\to\infty} 0 \quad \text{für } x \to \infty \text{ für beliebiges } n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0$$

$$f(x) = a^x \quad (a > 0)$$

$$f(x) = \underline{\underline{a^x}} = e^{\ln(a^x)} = \underline{\underline{e^{x \cdot \ln a}}}$$

$\log_a x$ Umkehrfunktion zu a^x

$$\log_a(a^x) = x$$

es gilt $\forall x \in \mathbb{R}$: $(a \neq 1)$

$$\log_a a^x = x$$

$$\ln a^x = x \cdot \ln a \iff x = \frac{\ln a^x}{\ln a}$$

also:

$$\log_a a^x = \frac{\ln a^x}{\ln a}$$

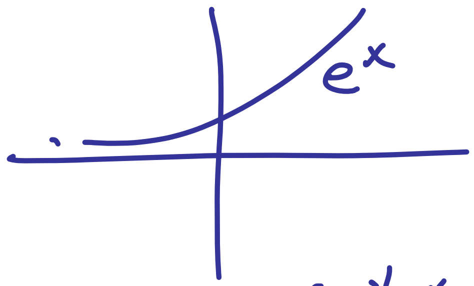
mit

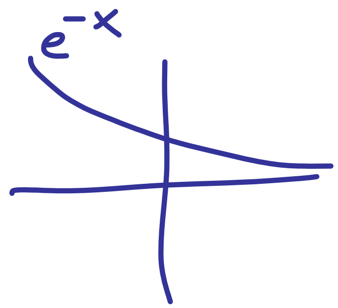
$$y = a^x$$

folgt

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a} \qquad \text{oder} \qquad \boxed{\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x}$$

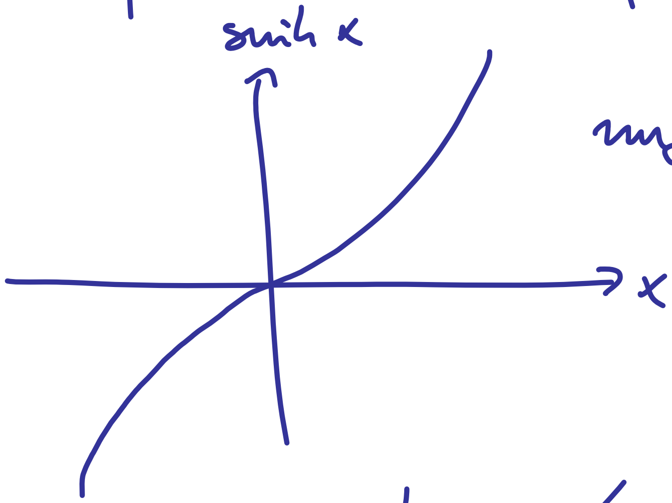
Hyperbolische Funktionen





$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

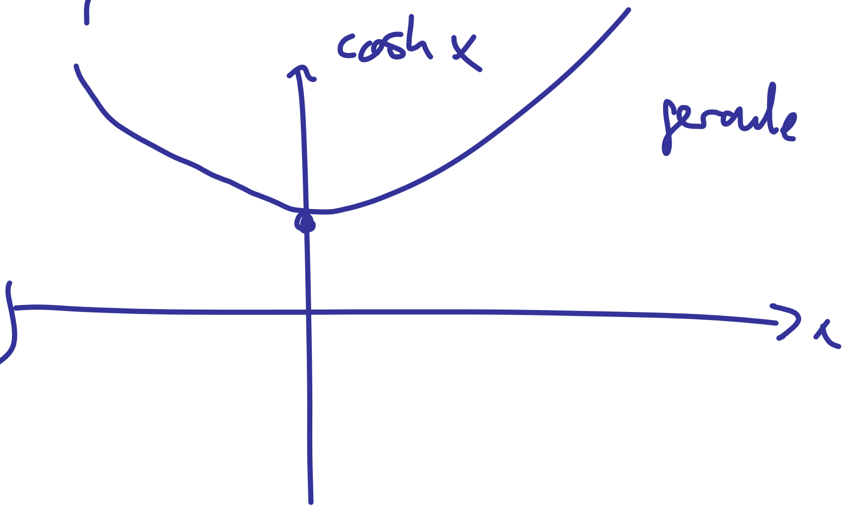
$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$



ungerade

$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$



gerade

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{-2x}} + 2\right) - \frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{-2x}} - 2\right)$$

$$\parallel$$

$$1/2 + 1/2 = 1$$