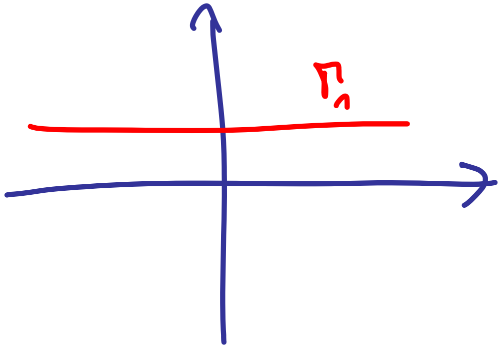
Wdh.:

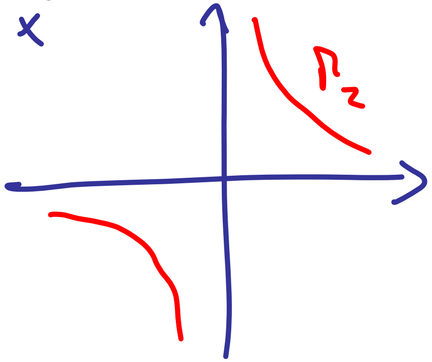
$f_1 : \mathbb{R} \to \{1\}$

$f_1(x) = 1$

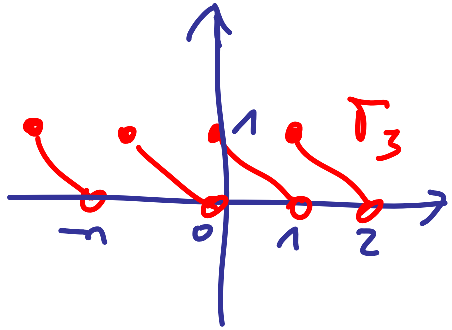


$f_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$

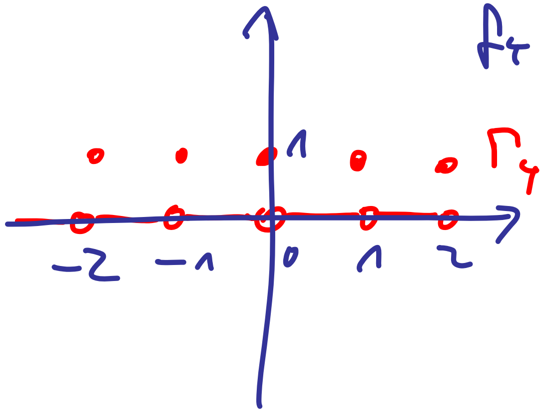
$f_2(x) = \frac{1}{x}$



$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

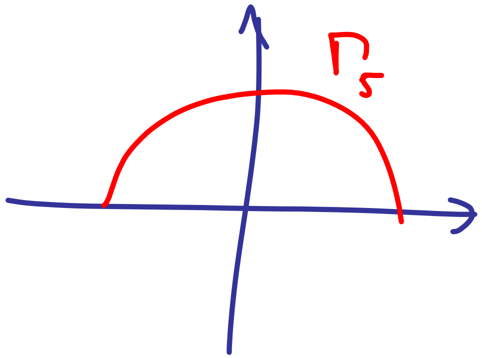


$f_4 : \mathbb{R} \to \{0,1\}$



$f_5 : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$f_5(x) = \sqrt{1-x^2}$



$f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$

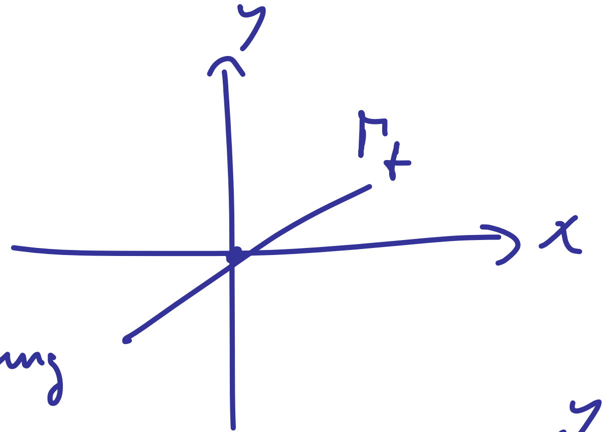
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
N_f	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\{-1, 1\}$
gerade	✓	✗	✗	✓	✓
ungerade	✗	✓	✗	✗	✗
injektiv	✗	✓	✗	✗	✗
surjektiv	✓	✓	✗	✓	✗
mon. steigend	✓	✗	✗	✗	✗
str. mon. st.	✗	✗	✗	✗	✗
mon. fallend	✓	✗	✗	✗	✗
str. mon. fall.	✗	✗	✗	✗	✗
nach oben beschr.	✓	✗	✓	✓	✓
nach unten beschr.	✓	✗	✓	✓	✓
periodisch	(✓)	✗	✓	✓	✗

Stetigkeit von Funktionen

① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x$

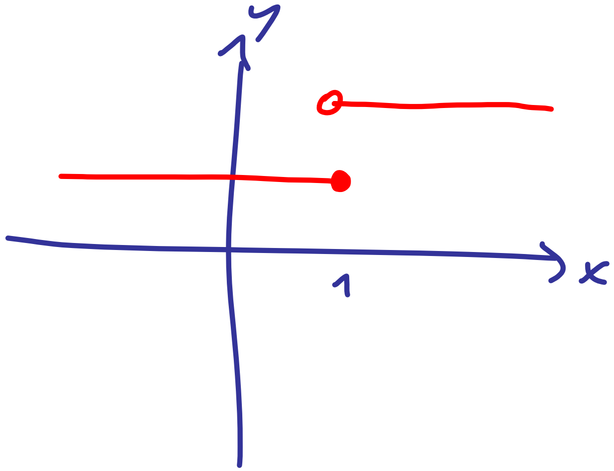
(Identitätsabbildung)

f hat keinen Sprung



② $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \leq 1 \\ 2 & \forall x > 1 \end{cases}$$



g hat einen Sprung bei $x = 1$

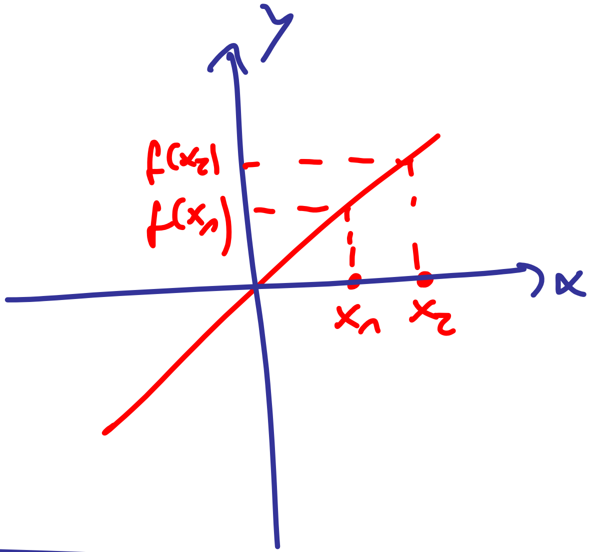
Man sagt: "f ist überall stetig"

"g ist nicht stetig bei $x = 1$"

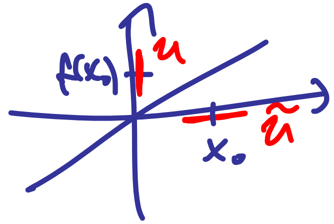
Formulierung 1

Liegen $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ nahe beieinander, ?
so liegen auch $f(x_1), f(x_2) \in \mathbb{W}$
nahe beieinander.

→ Dann ist die Funktion stetig



Formulierung 2

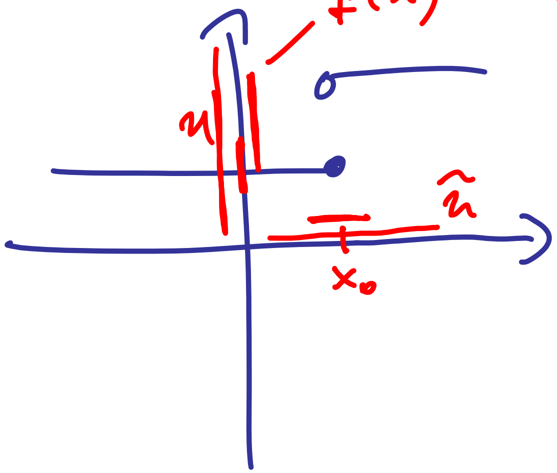


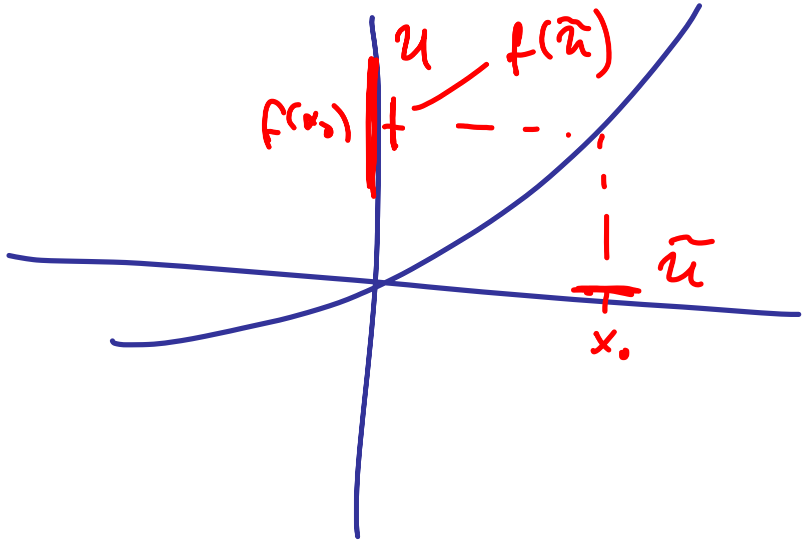
Sei $x_0 \in \mathbb{D}$ mit Funktionswert $f(x_0) \in \mathbb{W}$.

Zu jeder (noch so kleinen) Umgebung $\mathcal{U}$ von $f(x_0)$ in $\mathbb{W}$ gibt es stets eine (hinreichend kleine) Umgebung $\tilde{\mathcal{U}}$ von x_0 in $\mathbb{D}$, so dass alle Funktionswerte von Punkten aus $\tilde{\mathcal{U}}$ auch vollständig in $\mathcal{U}$ liegen, bzw. $f(\tilde{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{U}$

$$\forall\, \mathcal{U} \subset \mathbb{W} \text{ mit } f(x_0) \in \mathcal{U} \;\; \exists\, \tilde{\mathcal{U}} \subset \mathbb{D} : f(\tilde{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{U}$$

(eigentlich: $f(\tilde{U}) = \{1,2\}$

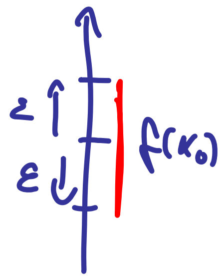




Def: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig, falls sie $\forall x_0 \in D$ stetig ist.

$$U = \left] f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \right[$$

ε-Umgebung von $f(x_0)$



$\varepsilon > 0$

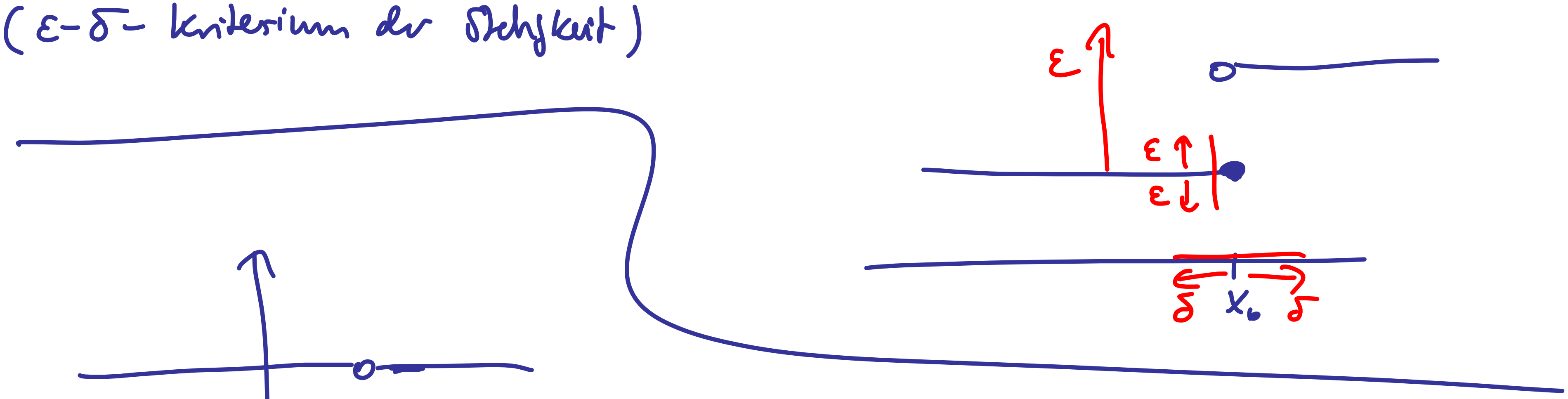
$$\tilde{U} = \left] x_0 - \delta, x_0 + \delta \right[$$

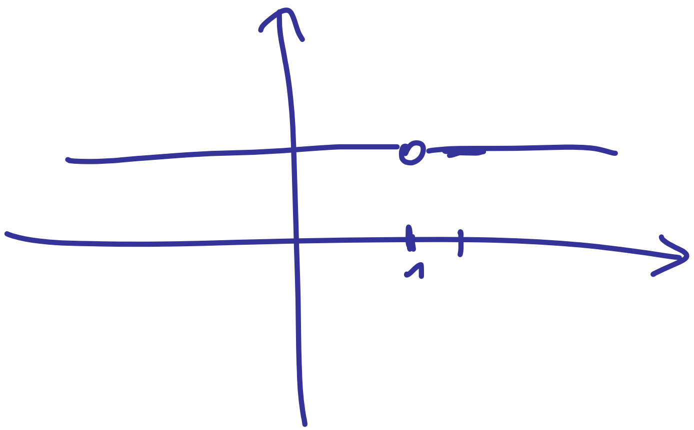
$\delta > 0$

Def:

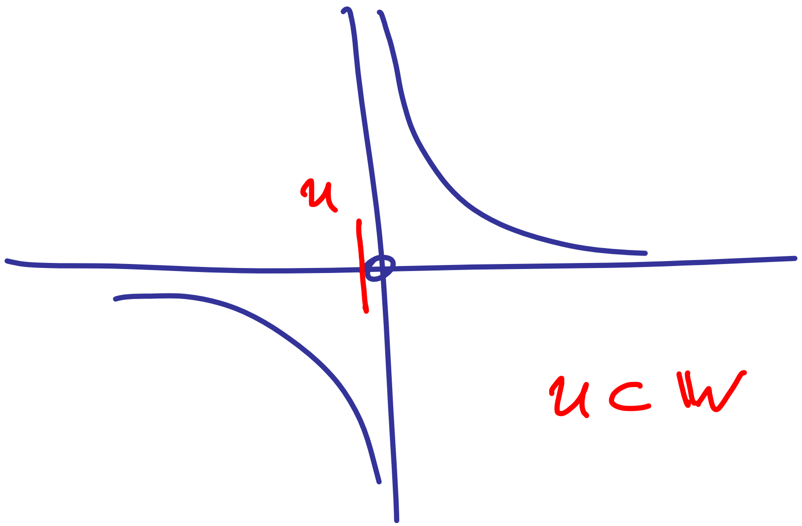
Eine Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in \mathbb{D}$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{D}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

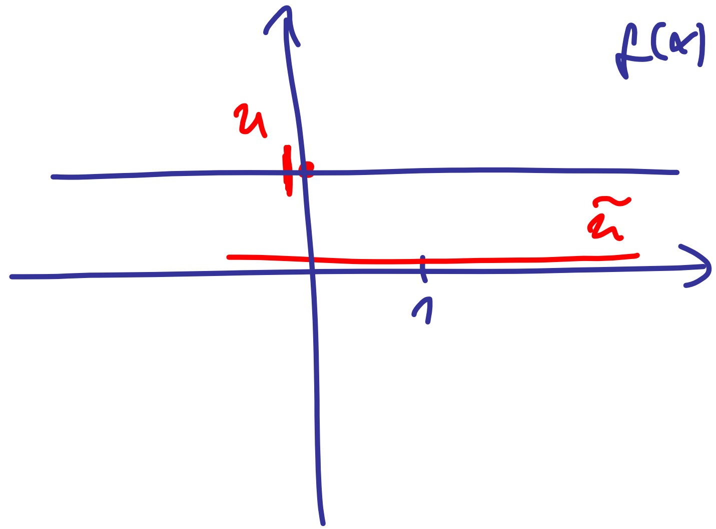
(ε-δ-Kriterium der Stetigkeit)





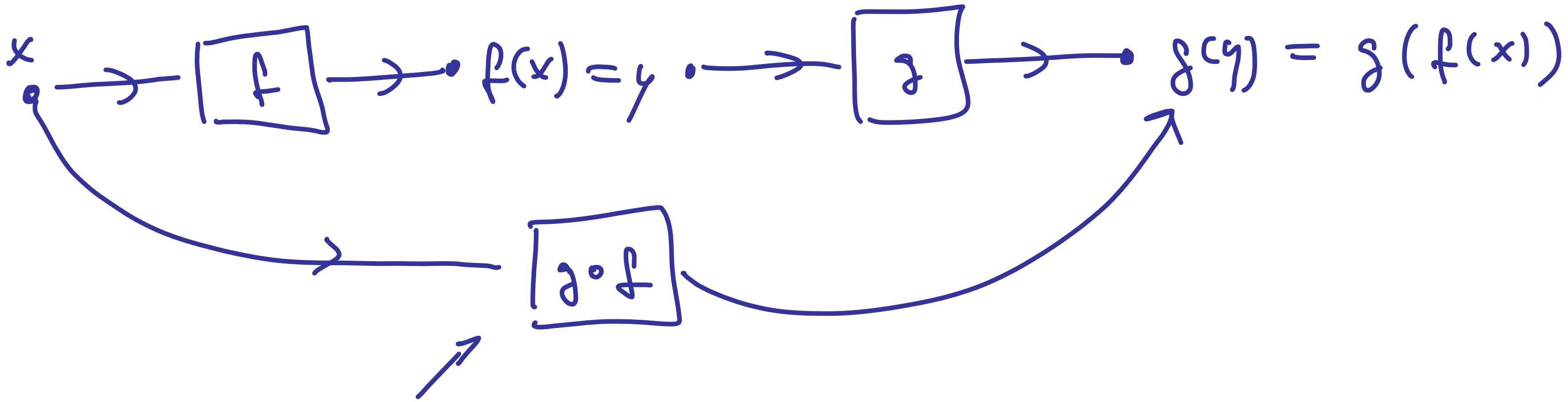
$f(x) = 1 \qquad f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$





$f(x) = 1$

1.3 Verkettung von Funktionen



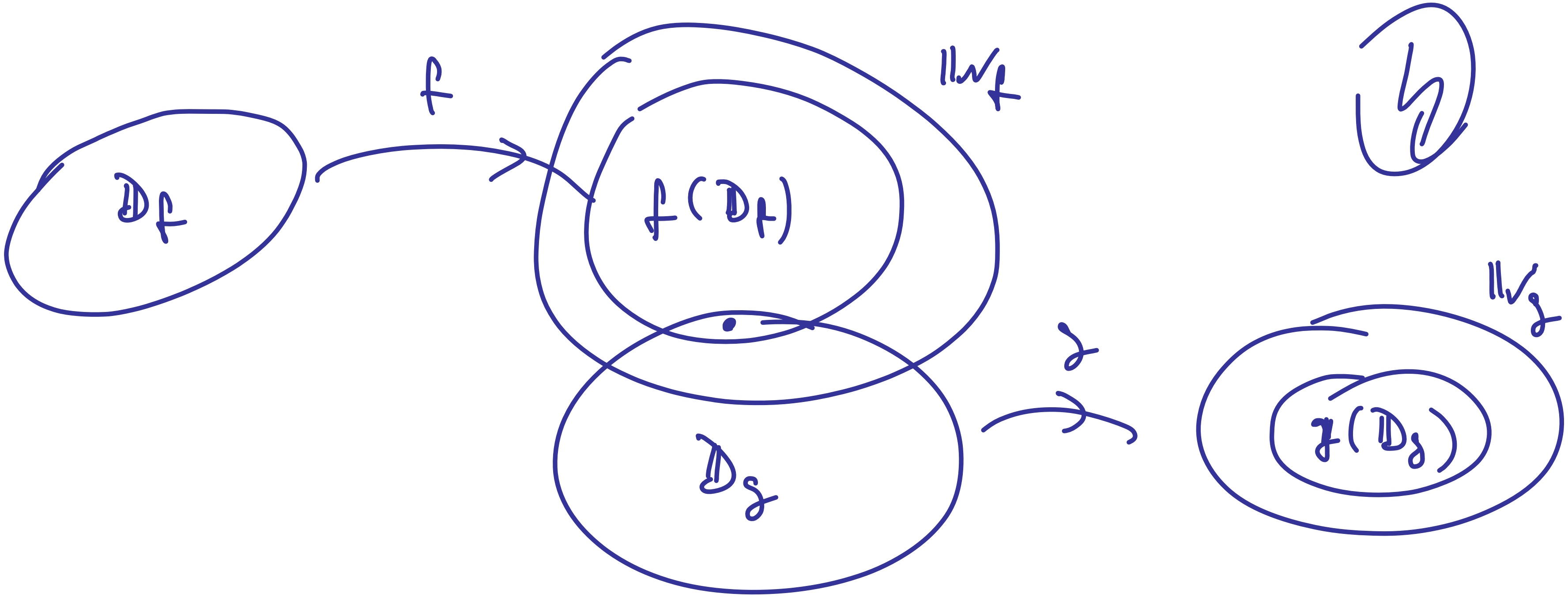
die Funktion „g nach f"

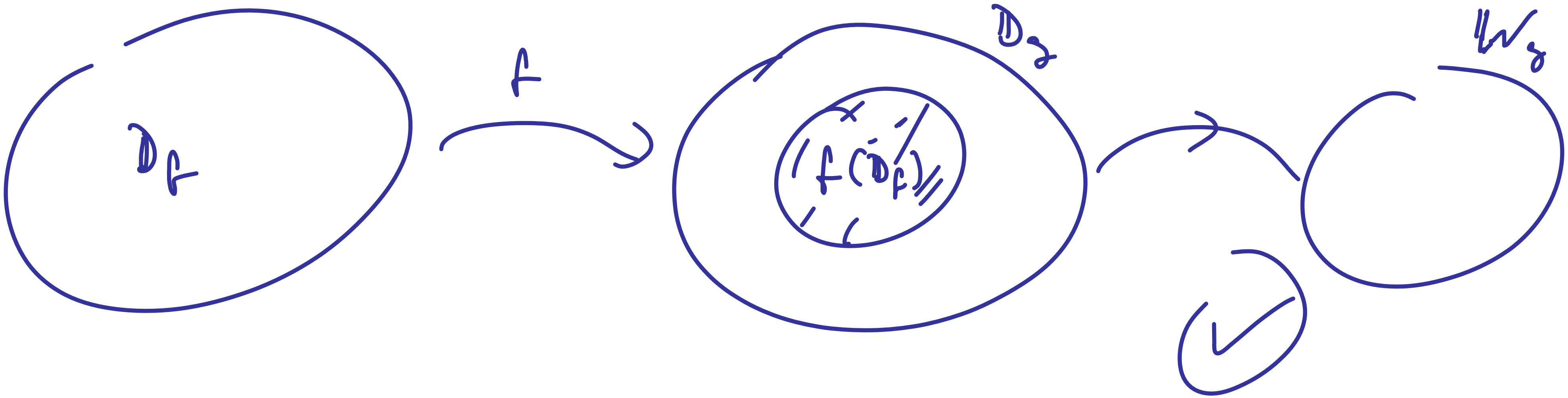
$f: D_f \to W_f$

$g: D_g \to W_g$

Verkettung nur möglich, falls

$$\boxed{f(D_f) \subset D_g}$$


$\mathbb{D}_f$
f
$f(\mathbb{D}_f)$
$\mathbb{W}_f$
b
g
$\mathbb{D}_g$
$g(\mathbb{D}_g)$
$\mathbb{W}_g$


$\mathbb{D}_f$
f
$\mathbb{D}_g$
$f(\mathbb{D}_f)$
$\mathbb{W}_g$

Bsp (i)

$$f(x) = x + 10 \qquad D_f = \mathbb{R} \qquad W_f = \mathbb{R}$$

$$g(y) = y^2 \qquad D_g = \mathbb{R} \qquad W_g = \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ccc} f(D_f) & \subset & D_g \\ \| & & \| \\ \mathbb{R} & \subset & \mathbb{R} \end{array} \quad \checkmark$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\underbrace{x+10}_{y}) = (x+10)^2$$

$f \circ g$?

$$\begin{array}{ccc} g(D_g) & \subset & D_f \ ? \\ \| & & \| \\ \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} & \subset & \mathbb{R} \end{array} \quad \checkmark$$

$\neq$ (nicht gleich $\forall x$)

verschiedene Funktionen!

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 10$$

$$\boxed{f \circ g \neq g \circ f}$$

(ii) $f(x) = x^3$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \qquad W_f = \mathbb{R}$

$g(y) = \dfrac{1}{y-8}$ $\qquad D_g = \mathbb{R} \setminus \{8\} \qquad W = \mathbb{R}$

$$\underset{\mathbb{R}}{\underset{\parallel}{f(D_f)}} \subset \underset{\mathbb{R}\setminus\{8\}}{\underset{\parallel}{D_g}} \quad ?$$

<u>Problem!</u>

<u>Umgehung des Problems?</u>

definiere $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

dann ist $f(D_f) = \mathbb{R} \setminus \{8\} = D_g$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = \frac{1}{x^3 - 8}$$

$D_{g\circ f} = D_f$

$W_{g\circ f} = W_g$