Vorkurs Mathematik

Warum Mathe ?

Ladung

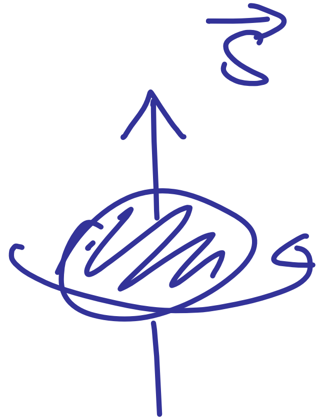
$$\vec{\mu} = g \, \frac{e}{2m} \, \vec{S}$$

magn. Moment

g – Faktor

Masse

Spin



Klassisch : $g = 1$

Dirac : $g = 2$

QED : $g \approx 2{,}002$

genauer : $g = 2{,}002\,319\,304\,363\,56\;(154)$

Exp: $g = 2{,}002\,319\,304\,361\,82\;(52)$

- Physik ist eine grundlegende Wiss.
- liefert quantitative Vorhersagen
- phys. Theorien basieren auf der Sprache der Mathematik

Vorkurs:

(Konsolidierung), Auffrischung, Homogenisierung des Schul-Mathematik

Studium:

- Mathematik für Physik I, .., IV (1.–4. Semester)
  → FB Mathematik
- Einführung i. d. Th. Physik I, II (1.–2. Semester)
  → FB Physik Mechanik, Elektrodynamik

Homepage: https://theorie.physnet.uni-hamburg.de/group_vts

Passwort: "e"

---

1 Funktionen

1.1 Grundlegende Begriffe

(reelle Funktionen)

seien

$\mathbb{D}, \mathbb{W} \subset \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen

$\subset$ "ist Teilmenge von"

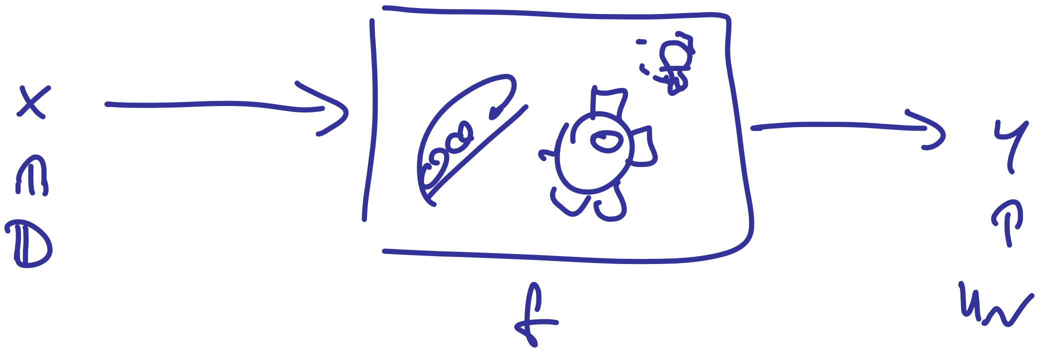
Eine (reelle) Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ ist eine Vorschrift,
die <u>jedem</u> Element x von $\mathbb{D}$ <u>genau ein</u> Element
$y = f(x) \in \mathbb{W}$ zuordnet

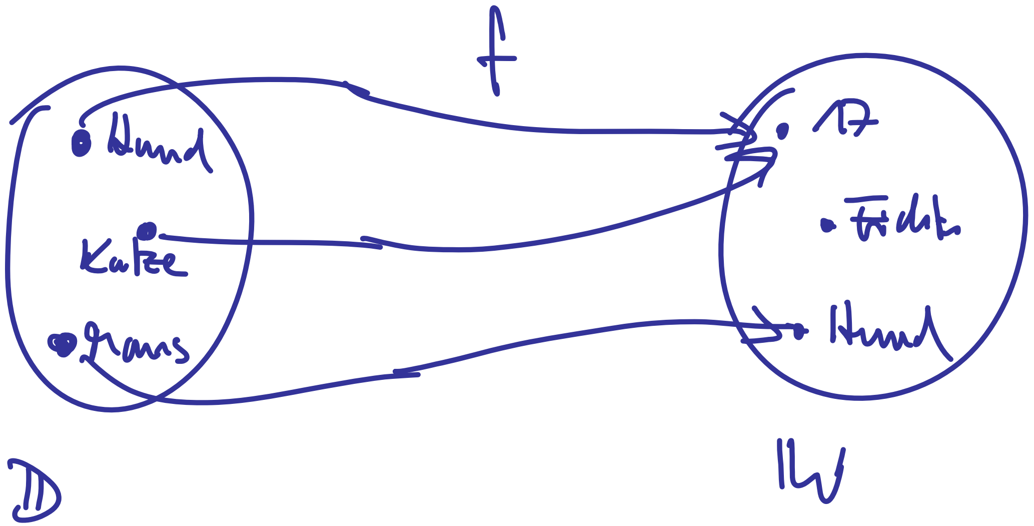
$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$$

$$f : x \mapsto y = f(x) \qquad x \in \mathbb{D}\ ,\ y \in \mathbb{W}$$

$\mathbb{D}$: Definitionsbereich von f (Urbildmenge , Urbild)

$\mathbb{W}$: Wertebereich von f (Wertevorrat , Bildmenge)





Zur Bedeutung von "jeden" und "genau ein"

Wird einem Urbild $x \in \mathbb{D}$

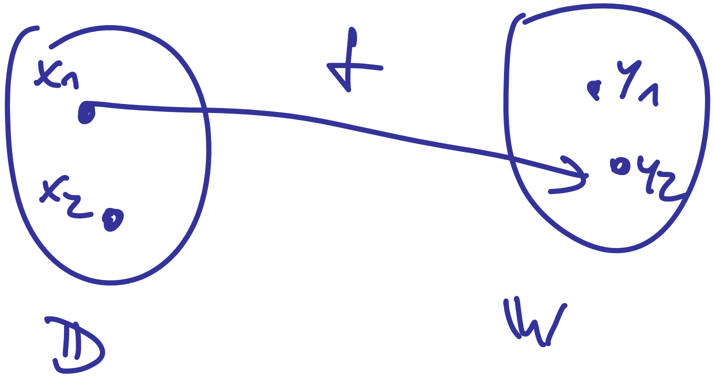
(i) kein Bild

oder

(ii) mehr als ein Bild

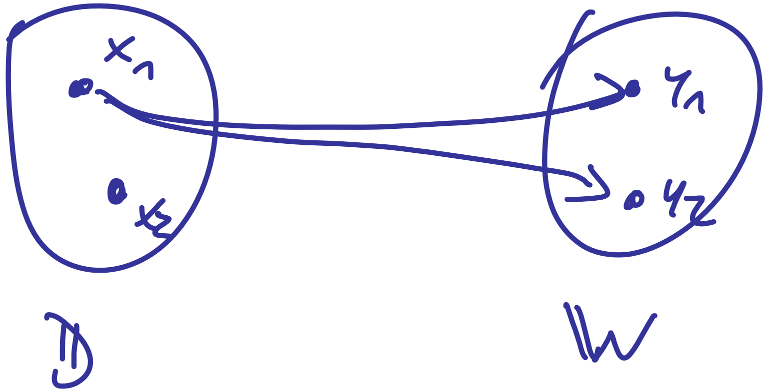
zugeordnet, dann ist f keine Funktion!

(i)



<u>Keine</u> Funktion, denn x_2 hat kein Bild!

(ii)



<u>Keine</u> Funktion, denn x_1 hat zwei Bilder!

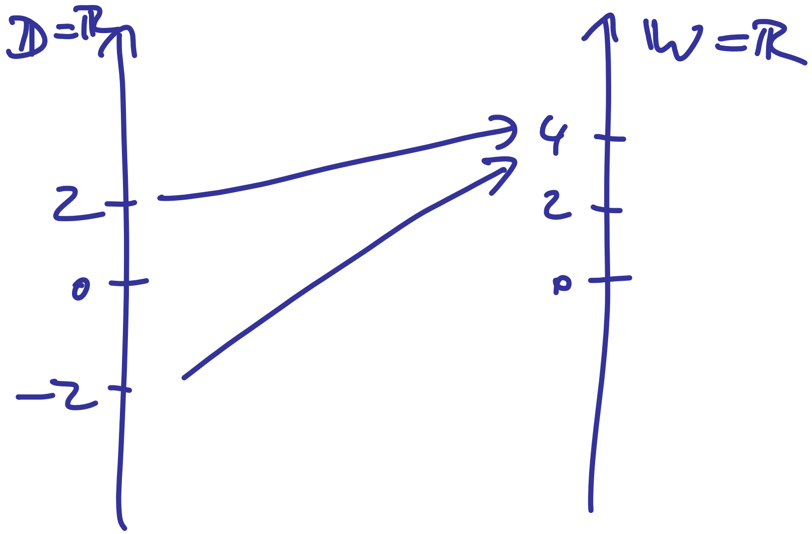
Beispiele für Funktionen

(i) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

(ii) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

$y = x^2$, $\quad f(x) = x^2$



Man sieht:

(i) Der Wertebereich $\mathbb{W}$ muss nicht notwendigerweise voll ausgeschöpft werden, d.h. es kann $y \in \mathbb{W}$ geben, die kein Urbild haben, bzw. die nicht als Funktionswert $f(x)$ auftreten (z.B. $y = -4$)

$(\exists\, y \in \mathbb{W}$ ohne Urbild$)$

(ii) Es kann Elemente $y \in \mathbb{W}$ geben, die Funktionswerte mehrerer Argumente sind (z.B. $y = 4$, $y = f(2)$, $y = f(-2)$)

Definition

Die Menge der tatsächlich auftretenden Funktionswerte

$$f(\mathbb{D}) := \{ f(x) \in \mathbb{W} \mid x \in \mathbb{D} \}$$

heißt "Bildbereich" ("Bild" von $\mathbb{D}$ unter f)

$:=$ Definition

$\mid$ "für die gilt"

ein Beispiel ist

$$f(\mathbb{D}) = \{ y \in \mathbb{W} \mid y \geq 0 \}$$

<u>Definition:</u>

Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ heißt <u>injektiv</u>, falls

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{D}$$

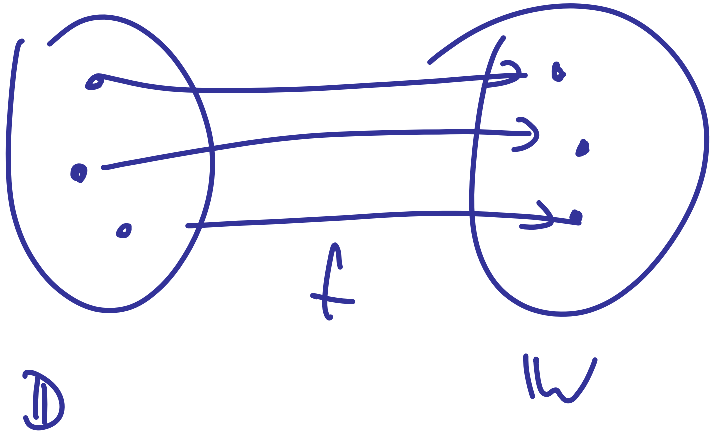
$\Leftrightarrow$ Jedes Element $y \in \mathbb{W}$ wird <u>höchstens einmal angenommen.</u>

"$\exists$" <u>es existiert</u>

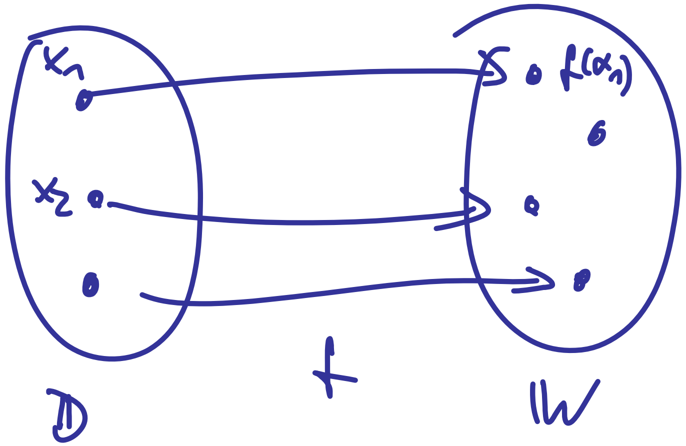
"$\forall$" <u>für alle</u>

<u>Beispiele</u>

(i)



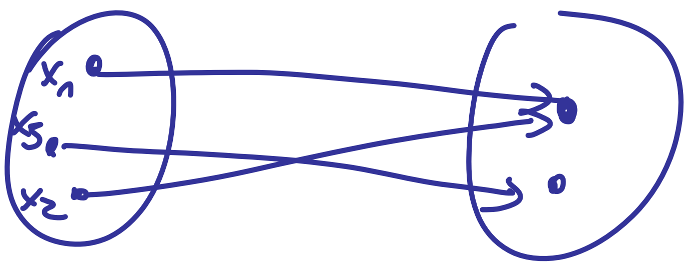
(ii)



f ist injektiv

$f(\mathbb{D}) \neq \mathbb{W}$

(iii)



f ist <u>nicht</u> injektiv

$f(x_1) = f(x_2)$ aber $x_1 \neq x_2$

Definition

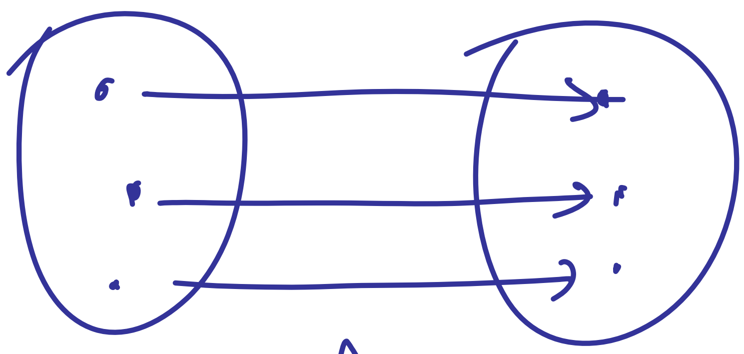
Eine Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ heißt **surjektiv**, wenn

$$f(\mathbb{D}) = \mathbb{W} \qquad (\text{„Wertebereich} = \text{Bildbereich"})$$

$\Longleftrightarrow$

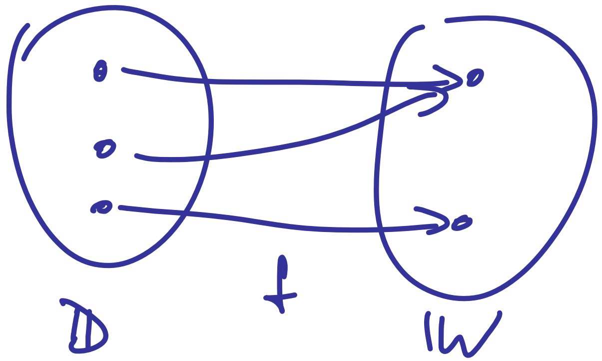
Jedes Element $y \in \mathbb{W}$ wird mindestens einmal angenommen.

Bsp:

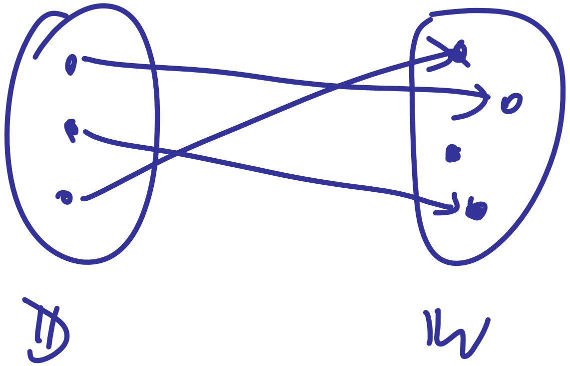


$\mathbb{D}$ $\qquad f \qquad$ $\mathbb{W}$

f ist surjektiv



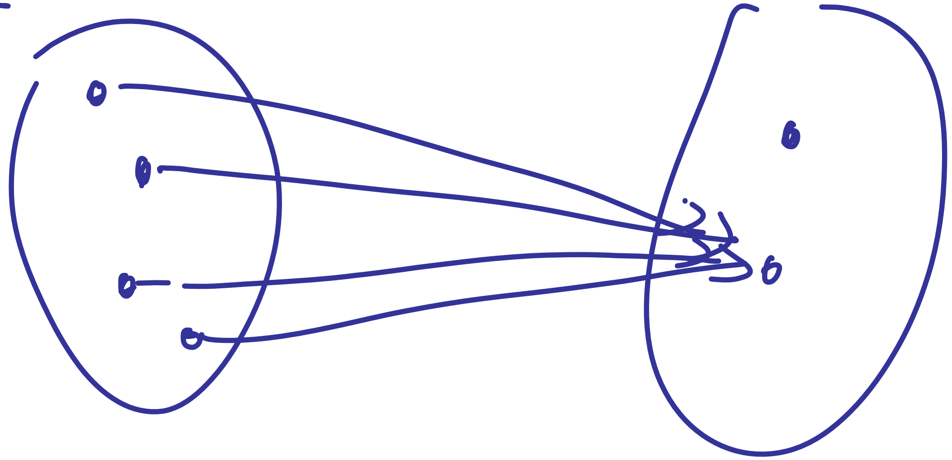
f ist surjektiv



f ist <u>nicht</u> surjektiv

<u>Definition</u>: Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ heißt <u>bijektiv</u>, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Beispiel



f ist nicht injektiv und nicht surjektiv

Bsp.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = x$$