Theorie der Kondensierten Materie – Übungen

Problem 32 — Matsubara-Frequenzen
Zeigen Sie, dass die Fermi-Funktion / Bose-Funktion

$$\frac{1}{e^{\beta\omega} - \varepsilon}$$

für komplexe Frequenzen eine analytische Funktion ist bis auf Polstellen erster Ordnung an den fermionischen / bosonischen Matsubara-Frequenzen! Bestimmen Sie die Residuen!

Problem 33 — Matsubara-Summen
Es sei $F(\omega)$ eine analytische Funktion bis auf Pole erster Ordnung auf der reellen ω-Achse. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{\beta}\sum_n F(i\omega_n) = \frac{\varepsilon}{2\pi i}\oint_C d\omega \frac{1}{e^{\beta\omega} - \varepsilon} F(\omega) \ ,$$

wobei C ein Weg ist, der jede Matsubara-Frequenz gegen den Uhrzeigersinn genau einmal umläuft.

Problem 34 — Ein-Teilchen-Korrelationsfunktion
Begründen Sie, dass die Matsubara-Summe

$$\frac{1}{\beta}\sum_n e^{i\omega_n 0^+} G_{\alpha\beta}(i\omega_n)$$

für endliches (aber infinitesimales) 0^+ wohldefniert ist, und berechnen Sie die Summe durch Integration in der komplexen Ebene (s.o.) mit anschließender geeigneter Deformation des Integrationswegs, um zu zeigen, dass

$$\frac{1}{\beta}\sum_n e^{i\omega_n 0^+} G_{\alpha\beta}(i\omega_n) = -\varepsilon\langle c_\beta^\dagger c_\alpha\rangle \qquad !$$

Problem 35 — Potenzialstreuung
Gegeben ist ein Fermi-System mit Hamiltonian $H = H_0 + V$, wobei

$$H_0 = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} c_\alpha^\dagger c_\beta$$

und

$$V_0 = \sum_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} c_\alpha^\dagger c_\beta \ .$$

a) Geben Sie die freie Ein-Teilchen-Matsubara-Funktion $\boldsymbol{G}^{(0)}(i\omega_n)$ an!
(Hinweis: $\boldsymbol{G}^{(0)}(i\omega_n) = \boldsymbol{G}^{(0)}(\omega)$ an der Stelle $\omega = i\omega_n$).

b) Geben Sie die wechselwirkende Ein-Teilchen-Matsubara-Funktion $\boldsymbol{G}(i\omega_n)$ an!

c) Entwickeln Sie $\boldsymbol{G}(i\omega_n)$ in Potenzen der Wechselwirkungsstärke!

d) Symbolisieren Sie das Ergebnis mit Hilfe von Diagrammen!

e) Was bestimmt den Konvergenzradius der Störreihe?

f) Betrachten Sie ein lokales Störpotenzial (α_0 sei ein festes, gegebenes Orbital),

$$V_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\alpha_0}\delta_{\beta\alpha_0} V_0 \, ,$$

und bestimmen Sie $\boldsymbol{G}(i\omega_n)$, indem Sie die Diagrammreihe für $\boldsymbol{G}(i\omega_n)$ vollständig aufsummieren!