Theorie der Kondensierten Materie – Übungen

Problem 20 — Homogenität der Green-Funktion
Zeigen Sie, dass

$$G_{AB}^{(\mathrm{ret})}(t,t') = G_{AB}^{(\mathrm{ret})}(t-t') \;,$$

für ein System mit nicht explizit zeitabhängigem Hamilton-Operator!

Problem 21 — $1/\omega$-Entwicklung
Zeigen Sie, dass

$$\langle\langle c_\alpha; c_\beta^\dagger\rangle\rangle_\omega = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\omega} + \frac{t_{\alpha\beta} - \mu\delta_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma\delta}(U_{\alpha\gamma\beta\delta} + \epsilon U_{\gamma\alpha\beta\delta})\langle c_\gamma^\dagger c_\delta\rangle}{\omega^2} + \mathcal{O}(\omega^{-3})$$

für ein System von Bosonen ($\epsilon = +1$) oder Fermionen ($\epsilon = -1$) mit Hamilton-Operator

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta}\, c_\alpha^\dagger c_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\gamma\delta}\, c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma \;!$$

Problem 22 — Spektraltheorem
Betrachten Sie ein freies, spinloses Teilchen in einer Dimension:

$$H = \frac{p^2}{2m} \;, \qquad [x,p]_- = i \;.$$

Der (gemischte) Zustand des Systems sei durch $\rho = \exp(-\beta H)/Z$ mit $Z = \mathrm{Sp}\exp(-\beta H)$ gegeben.

a) Zeigen Sie durch eine explizite Rechnung, dass

$$\langle H\rangle = \frac{1}{2}T$$

und begründen Sie das Ergebnis!

b) $\langle H\rangle$ soll jetzt aus der Kommutator-Green-Funktion $G^{(+)}(\omega) = \langle\langle p;p\rangle\rangle^{(+)}$ berechnet werden. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $G^{(+)}(\omega)$! (Das Ergebnis ist trivial).

c) Versuchen Sie, den Erwartungswert $\langle H\rangle = \langle p\cdot p\rangle/2m$ aus dem Spektraltheorem zu bestimmen. Beachten Sie dabei die Konstante D (s. Vorlesung)!

d) Begründen Sie die Beziehung

$$\lim_{\omega\to 0}\omega G^{(-)}(\omega) = 2D \;,$$

und berechnen Sie so die Konstante D aus der Antikommutator-Green-Funktion $G^{(-)}(\omega) = \langle\langle p;p\rangle\rangle^{(-)}$! Gelingt die Bestimmung von $\langle H\rangle$?

e) Es sei nun ein infinitesimales, symmetriebrechendes Feld durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\eta^2 x^2 \qquad \text{mit } \eta \to 0$$

eingeführt. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Kommutator-Green-Funktion $\langle\langle p; p\rangle\rangle^{(+)}$ auf und lösen Sie diese für $\eta \neq 0$! (Dazu ist auch $\langle\langle x; p\rangle\rangle^{(+)}$ zu bestimmen).

f) Bestimmen Sie die Konstante D!

g) Berechnen Sie $\langle H\rangle_\eta$ aus dem Spektraltheorem für $G^{(+)}(\omega)$ für $\eta \neq 0$!

h) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\eta\to 0}\langle H\rangle_\eta = \frac{1}{2}T \; !$$

Problem 23 — Dirac-Identität
Begründen Sie die Identität

$$\frac{1}{x + i0^+} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x) \; !$$

Problem 24 — Bosonische Ein-Teilchen-Green-Funktion
Betrachten Sie ein System von Bosonen mit Erzeugern und Vernichtern $b_\alpha^\dagger$ und b_α. Die Ein-Teilchen-Green-Funktion ist:

$$G_{\alpha\beta}(\omega) = \langle\langle b_\alpha; b_\beta^\dagger\rangle\rangle \; .$$

Definieren Sie

$$Q_\alpha = \frac{1}{2}(b_\alpha + b_\alpha^\dagger) \; , \; P_\alpha = \frac{1}{2i}(b_\alpha - b_\alpha^\dagger) \; ,$$

und zeigen Sie, dass

$$G_{Q_\alpha Q_\alpha}(\omega) = G_{Q_\alpha Q_\alpha}(-\omega) \; , \; G_{P_\alpha P_\alpha}(\omega) = G_{P_\alpha P_\alpha}(-\omega) \; !$$

Was gilt für die entsprechenden Spektraldichten?
Wie vereinfacht sich bei der Anwendung des Spektraltheorems die Berechnung von $\langle Q_\alpha^2\rangle$?
Warum ist die Berechnung mittels $G_{Q_\alpha Q_\alpha}(\omega)$ komplizierter als mittels $G_{\alpha\beta}(\omega)$?