Theorie der Kondensierten Materie – Übungen

Problem 17 — Gittertranslationen
Durch

$$\boldsymbol{P} = \sum_{\boldsymbol{k}}^{1\mathrm{BZ}} \sum_{\sigma} \boldsymbol{k}\, c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} c_{\boldsymbol{k}\sigma}$$

sei der Operator des Gesamt-Impulses definiert. Weiter sei

$$U(\boldsymbol{R}_0) \equiv U_0 = e^{i\boldsymbol{P}\boldsymbol{R}_0}$$

wobei $\boldsymbol{R}_0$ ein belieber Gittervektor ist: $\boldsymbol{R}_0 = \sum_{s=1}^{D} n_s \boldsymbol{a}_s$.

a) Zeigen Sie, dass U_0 unitär ist!

b) Zeigen Sie, dass $U(\boldsymbol{R}_0)U(\boldsymbol{R}_0') = U(\boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{R}_0')$ und dass die $U(\boldsymbol{R}_0)$ eine Darstellung der abelschen Gruppe der Gittertranslationen bilden!

c) Nehmen Sie an, dass

$$L_{\boldsymbol{P}\boldsymbol{R}_0} c_{i\sigma} = [c_{i\sigma}, \boldsymbol{P}\boldsymbol{R}_0] = \sum_j M_{ij} c_{j\sigma}$$

mit einer Matrix M und zeigen Sie, dass dann

$$U_0 c_{i\sigma} U_0^\dagger = \sum_j \left(e^{-iM}\right)_{ij} c_{j\sigma} \;!$$

d) Zeigen Sie, dass M durch

$$M_{ij} = \frac{1}{L} \sum_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j)} \boldsymbol{k}\boldsymbol{R}_0$$

gegeben ist! Verwenden Sie dazu die Fourier-Transformation in der Form

$$c_{i\sigma} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{R}_i} c_{\boldsymbol{k}\sigma} \;!$$

e) Schreiben Sie $M = SmS^\dagger$ mit einer unitären Matrix S und einer Diagonalmatrix m, und geben Sie S und m explizit an!

f) Nutzen Sie die Beziehung

$$e^{-iM} = S e^{-im} S^\dagger$$

und jetzt zu zeigen, dass

$$U_0 c_{i\sigma} U_0^\dagger = c_{i-i_0\sigma} \;!$$

g) Unter welchen Umständen gilt

$$[U_0, H] = 0$$

für das Hubbard-Modell?

h) Zeigen Sie, dass

$$[\boldsymbol{P}, H] \neq 0$$

ist, auch für den Fall dass $[U_0, H] = 0$! Interpretieren Sie dies Resultat!

i) In welchen Sinne können die Eigenzustände von H durch $\boldsymbol{k} \in$ 1BZ klassifiziert werden?

Problem 18 — $SU(2)$-Invarianz
Betrachten Sie die SU(2)-Gruppe der Spinrotationen, die durch den unitären Operator

$$U(\boldsymbol{a}) = \exp(i\boldsymbol{a}\boldsymbol{S})$$

beschrieben wird ($\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{S}$ Gesamtspin).

a) Berechnen Sie $[c_{i\sigma}, \boldsymbol{S}]_-$!

b) Zeigen Sie, dass man das Resultat kompakt als Gleichung für zweikomponentige "Spinoren" schreiben kann:

$$[\left(\begin{array}{c} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{array} \right), S_{i\mu}]_- = \frac{1}{2}\sigma^{(\mu)} \left(\begin{array}{c} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{array} \right) \qquad !$$

$\sigma^{(\mu)}$ ($\mu = x, y, z$) sind die Pauli-Matrizen.

c) Wie transformiert sich der Vernichter $\left(\begin{array}{c} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{array} \right)$ unter der SU(2)-Transformation?

d) Zeigen Sie, dass der Hubbard-Hamilton-Operator SU(2)-invariant ist, indem Sie ihn so umformen, dass die Invarianz offensichtlich wird!

Problem 19 — Zeitordnung
Es sei $\boldsymbol{T}(t)$ eine zeitabhängige Matrix, die zu jedem Zeitpunkt hermitesch ist. Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{U}(t) = \mathcal{T} \exp\left(-i \int_0^t \boldsymbol{T}(\tau) d\tau\right)$$

die Lösung der Differenzialgleichung

$$i\frac{d}{dt}\boldsymbol{U}(t) = \boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{U}(t)$$

mit der Anfangsbedingung $\boldsymbol{U}(0) = \mathbf{1}$ für $t > 0$ ist! Hier bezeichnet $\mathcal{T}$ den Zeitordnungsoperator:

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{T}(t_1)\boldsymbol{T}(t_2)) = \boldsymbol{T}(t_1)\boldsymbol{T}(t_2) \qquad \text{für } \ t_1 > t_2$$

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{T}(t_1)\boldsymbol{T}(t_2)) = \boldsymbol{T}(t_2)\boldsymbol{T}(t_1) \qquad \text{für } \ t_1 < t_2 \ .$$

Wie lautet die Lösung für $t < 0$?