Condensed-Matter Theory - Special Topics

Problem 1 — Stoner-Modell
Betrachten Sie einen ferromagnetischen Zustand, der durch translationsinvariante und kollineare spontane Ordnung der lokalen magnetischen Momente in z-Richtung gekennzeichnet ist: $\langle \boldsymbol{S}_i \rangle = \langle \boldsymbol{S}_j \rangle \propto \boldsymbol{e}_z$.

Zeigen Sie für diesen Fall, dass die Hartree-Fock-Näherung für das Hubbard-Modell auf das folgende effektive Modell oder Referenzsystem führt:

$$H_{\mathrm{Stoner}} = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} (\varepsilon(\boldsymbol{k}) + \frac{U}{2}(n - z_\sigma m)) c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} c_{\boldsymbol{k}\sigma} = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} \widetilde{\varepsilon}_\sigma(\boldsymbol{k}) c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} c_{\boldsymbol{k}\sigma}\,!$$

Hier ist n die Elektronendichte und m die (dimensionslose) Magnetisierung:

$$n = n_\uparrow + n_\downarrow, \qquad m = n_\uparrow - n_\downarrow, \qquad n_\sigma = \langle n_{i\sigma} \rangle, \qquad z_\uparrow = +1, \quad z_\downarrow = -1,$$

und $\varepsilon(\boldsymbol{k})$ die Dispersion, die sich durch Fourier-Transformation des Hoppings ergibt.

Stellen Sie eine Bestimmungsgleichung für den spinabhängigen Erwartungswert n_σ auf, und leiten Sie für festes n die folgende Bestimmungsgleichung für m ab:

$$m = \int dz \rho_0(z) \frac{\sinh(\beta U m/2)}{\cosh(\beta(z - \mu + Un/2)) + \cosh(\beta U m/2)}\,,$$

wobei $\rho_0(z) = \frac{1}{L}\sum_{\boldsymbol{k}} \delta(z - \varepsilon(\boldsymbol{k}))$ die freie Zustandsdichte definiert!

Zeigen Sie, dass $m = 0$ und dass mit m auch $-m$ eine Lösung ist, und diskutieren Sie den Fall $T \to \infty$!

Für $T \to T_C$, $T < T_C$ (T_C: Curie-Temperatur) ist $m \to 0$ ($m \neq 0$). Zeigen Sie, dass dann ($\beta_C = 1/T_C$):

$$1 = \frac{\beta_C U}{2} \int dz \rho_0(z) \frac{1}{\cosh(\beta_C(z - \mu + Un/2)) + 1}\,!$$

Leiten Sie für den Grenzfall $T_C = 0$ das sogenannte Stoner-Kriterium ab:

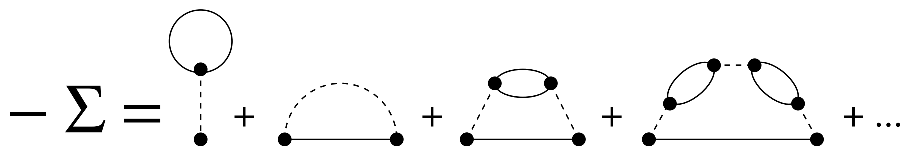
$$U\rho_0(\varepsilon_F^{(0)}) = 1\,!$$

Hier ist $\varepsilon_F = \mu(T = 0)$ und $\varepsilon_F = \varepsilon_F^{(0)} + Un/2$.

Problem 2 — RPA
Betrachten Sie das Hubbard-Modell für wechselwirkenden Fermionen

$$\mathcal{H} = \sum_{ij\sigma} (t_{ij} - \mu\delta_{ij}) c^\dagger_{i\sigma} c_{j\sigma} + \frac{U}{2} \sum_{i\sigma} n_{i\sigma} n_{i-\sigma}$$

und die folgende diagrammatisch definierte Näherung für die Selbstenergie $\Sigma_{ij}(i\omega_n)$:



a) Aufgrund der speziellen Form der Wechselwirkung im Hubbard-Modell haben einige Diagramme dieser Reihe den Wert 0. Welche sind dies? (Beachten Sie den Spin-Index im Wechselwirkungsterm!)

b) Diskutieren Sie die Diagramme in (imaginärer) Zeitdarstellung für den Grenzfall $\mu \to \infty$, d.h. $\langle n_{i\sigma} \rangle = 1$! Betrachten Sie dazu die Definition der Matusbara-Funktion $G_{ij\sigma}(\tau)$ für $\tau > 0$ und für $\tau < 0$, und begründen Sie damit, dass nur ein einziges Diagramm von Null verschieden ist! Welches? Welchen Wert has dieses?

c) Sind die Diagramme Skelette? Falls ja, "renormieren" Sie die Diagramme, d.h. ersetzen Sie Einfach- durch Doppellinien!

d) Die letzten beiden gezeichneten Diagramme enthalten einen bzw. zwei "bubbles". Benutzen Sie die Frequenz-Darstellung, und indizieren Sie ein RPA-Diagramm mit 3 "bubbles" vollständig! Von welcher Frequenz hängt ein einziger "bubble" ab, wenn dessen zwei Propagatoren die Matsubara-Frequenzen $i\omega$ und $i\omega'$ tragen? Ist diese externe "bubble"-Frequenz fermionisch oder bosonisch?

e) Berechnen Sie einen "bubble", d.h. führen Sie insbesondere die interne Matsubara-Summe aus, um die Spektradarstellung des "bubbles" zu erhalten!

f) Welchen Wert hat der "bubble" für $\mu \to \pm\infty$?

g) Wie kann man jetzt die Selbstenergie mit Hilfe des Resultats aus e) schreiben?