Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 14 — $SU(2)$-Invarianz
Betrachten Sie die SU(2)-Gruppe der Spinrotationen, die durch den unitären Operator

$$U(\boldsymbol{a}) = \exp(i\boldsymbol{a}\boldsymbol{S})$$

beschrieben wird ($\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{S}$ Gesamtspin).

a) Berechnen Sie $[c_{i\sigma}, \boldsymbol{S}]_-$!

b) Zeigen Sie, dass man das Resultat kompakt als Gleichung für zweikomponentige "Spinoren" schreiben kann:

$$[\begin{pmatrix} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{pmatrix}, S_{i\mu}]_- = \frac{1}{2}\sigma^{(\mu)} \begin{pmatrix} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{pmatrix} \qquad !$$

$\sigma^{(\mu)}$ ($\mu = x, y, z$) sind die Pauli-Matrizen.

c) Wie transformiert sich der Vernichter $\begin{pmatrix} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{pmatrix}$ unter der SU(2)-Transformation?

d) Zeigen Sie, dass der Hubbard-Hamilton-Operator SU(2)-invariant ist, indem Sie ihn so umformen, dass die Invarianz offensichtlich wird!

Aufgabe 15 — Teilchen-Loch-Transformation
Für das Hubbard-Modell auf einer eindimensionalen Kette von Plätzen $j = 1, ..., L$ mit geradem L sei der Operator

$$U = \prod_{j=1}^{L} \left(c_{j\uparrow} - (-1)^j c_{j\uparrow}^\dagger \right)$$

gegeben, wobei die Terme im Produkt nach aufsteigendem j angeordnet sind (der $j = L$-Term steht ganz rechts). U ist also eine kombinierte Teilchen-Loch- und Vorzeichen-Transformation, die nur für $\sigma =\uparrow$ wirkt.

a) Zeigen Sie, dass U unitär ist!

b) Zeigen Sie weiter, dass

$$U c_{j\uparrow} U^\dagger = (-1)^j c_{j\uparrow}^\dagger \;!$$

c) Betrachten Sie jetzt den lokalen Spin

$$\boldsymbol{S}_j = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} c_{j\sigma}^\dagger \sigma_{\sigma\sigma'} c_{j\sigma'}$$

und definieren Sie

$$\boldsymbol{T}_j = U \boldsymbol{S}_j U^\dagger \ .$$

Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{T}_j$ einen Spin darstellt, d.h. begründen Sie, dass die entsprechenden Vertauschungsrelationen erfüllt sind! $\boldsymbol{T}_j$ ist ein "Isospin".

d) Berechnen Sie T_{jz}, T_{jx}, T_{jy}!

e) Begründen Sie, dass sämtliche Komponenten von Spin und Isospin kommutieren!

f) Zeigen Sie, dass der Gesamt-Isospin $\boldsymbol{T} = \sum_j \boldsymbol{T}_j$ eine Erhaltungsgröße ist!

g) Begründen Sie, dass das Hubbard-Modell auf einem bipartiten Gitter bei Halbfüllung SU(2) $\times$ SU(2)-symmetrisch ist!