Übungen zur Klassischen Feldtheorie

Aufgabe 49 — Eichsymmetrie der Schrödinger-Gleichung

a) Zeigen Sie, dass die "freie" Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} i\hbar(\Psi^* \partial_t \Psi - \Psi \partial_t \Psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \Psi^* \nabla \Psi$$

die "freie" Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \partial_t \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi$$

liefert!

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_0$ invariant ist unter globalen Eichtransformationen der Felder:

$$\Psi = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} q\Lambda\right) \Psi' \qquad \Psi^* = \exp\left(+\frac{i}{\hbar} q\Lambda\right) \Psi'^*$$

wobei Λ eine reelle Konstante und $q =$const. die Ladung ist!

c) Zeigen Sie jetzt, dass $\mathcal{L}_0$ nicht invariant ist unter lokalen Eichtransformationen

$$\Psi = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} q\Lambda\right) \Psi' \qquad \Psi^* = \exp\left(+\frac{i}{\hbar} q\Lambda\right) \Psi'^*$$

wobei $\Lambda = \Lambda(\boldsymbol{r}, t)$ ein reelles Feld ist!

d) Es werden nun die Ableitungen in $\mathcal{L}_0$ durch neue "Ableitungen"

$$\partial_t \mapsto \widetilde{\partial}_t = \partial_t + \frac{i}{\hbar} q\Phi \qquad \nabla \mapsto \widetilde{\nabla} = \nabla - \frac{i}{\hbar} q\boldsymbol{A}$$

ersetzt. Die Felder $\Phi = \Phi(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ sind die Potenziale eines elektromagnetischen Felds. Damit wird eine neue Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ erzeugt, die die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld beschreibt:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} i\hbar(\Psi^* \widetilde{\partial}_t \Psi - \Psi \widetilde{\partial}_t \Psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} \widetilde{\nabla} \Psi^* \widetilde{\nabla} \Psi$$

Zeigen Sie, dass die neue, "wechselwirkende" Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ invariant ist unter lokalen Eichtransformationen, falls die sich die Potenziale gemäß

$$\Phi = \Phi' + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' - \frac{\partial \Lambda}{\partial \boldsymbol{r}}$$

transformieren!

e) Leiten Sie aus $\mathcal{L}$ die Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen mit Ladung q im elektromagnetischen Feld ab!

Aufgabe 50 — Klein-Gordon-Gleichung
a) Es sei $\varphi = \varphi(\boldsymbol{r}, t)$ ein reelles Feld, dessen Dynamik durch die Feldgleichung

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\varphi = 0$$

beschrieben wird! Zeigen Sie, dass dazu die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - (\nabla\varphi)^2\right)$$

gehört! Gilt Energie- und Impulserhaltung? Gibt es weitere Erhaltungsgrößen?

b) Betrachten Sie jetzt:

$$\mathcal{L}_0 = -\left(\frac{1}{c^2}\left(\partial_t\varphi\right)^* \partial_t\varphi - (\nabla\varphi)^* \nabla\varphi\right) \,.$$

Dies sei die Lagrange-Dichte eines komplexen Felds $\varphi = \varphi(\boldsymbol{r}, t)$ bzw. zweier Felder φ und φ^*. Leiten Sie die Feldgleichungen ab!

c) Zeigen Sie die Invarianz von $\mathcal{L}_0$ unter globalen Eichtransformationen $\varphi = \varphi' \exp(-i\Lambda)$! Nach dem Noether-Theorem folgt damit der Erhaltungssatz $\partial_t\rho + \nabla\boldsymbol{j} = 0$. Berechnen Sie ρ und $\boldsymbol{j}$! Ist eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation der erhaltenen Größe möglich?

d) Verifizieren Sie mit den Ausdrücken für ρ und $\boldsymbol{j}$ die Kontinuitätsgleichung direkt, d.h. ohne das Noether-Theorem zu benutzen!

e) Die Feldgleichung habe jetzt einen Masseterm ($m, \hbar =$const.):

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi = 0 \,.$$

Geben Sie die zugehörige Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ an! Was ändert sich bzgl. des Erhaltungssatzes?

Aufgabe 51 — Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Felds
Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{Feld}}}{\partial(\nabla A_i)} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{A} - \nabla A_i\right) \,,$$

wobei

$$\mathcal{L}_{\text{Feld}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\nabla\Phi + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2\mu_0}\left(\nabla\times\boldsymbol{A}\right)^2$$

die Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Felds ist!

Aufgabe 52 — Feldenergieerhaltung

Die Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Felds in Abwesenheit von Quellen ($\rho = 0$, $\boldsymbol{j} = 0$) lautet:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Feld}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\nabla\Phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} \left(\nabla \times \boldsymbol{A} \right)^2$$

Wegen der fehlenden expliziten Zeitabhängigkeit kann nach den allgemeinen Prinzipien der Feldtheorie eine Kontinuitätsgleichung hergeleitet werden. Berechnen Sie die Energiedichte des elektromagnetischen Felds aus den allgemeinen Formeln!

Diskutieren Sie den auftretenden Zusatzterm!

Aufgabe 53 — Lagrange-Dichte und Feldgleichungen in Vierer-Notation
Gegeben ist die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi_\nu)(\partial^\mu \varphi^\nu) + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi^\mu)(\partial_\nu \varphi^\nu) + \frac{m^2}{2} \sum_\mu \varphi_\mu \varphi^\mu$$

für ein reelles Feld $\varphi^\mu = \varphi^\mu(x)$ mit $x = (x^0, \boldsymbol{x})$.

Leiten Sie die Feldgleichung

$$\sum_\nu [g_{\mu\nu}(\Box + m^2) - \partial_\mu \partial_\nu] \varphi^\nu(x) = 0$$

ab, und zeigen Sie, dass

$$\sum_\mu \partial_\mu \varphi^\mu(x) = 0 \;!$$