Übungen zur Klassischen Feldtheorie

Aufgabe 44 — Lagrange-Multiplikatoren

Gegeben ist eine Funktion F von M reellen Variablen: $F(x_1, ..., x_M)$. Gesucht ist das Minimum (oder das Maximum oder ein Sattelpunkt) von F,

$$F(x_1, ..., x_M) \stackrel{!}{=} \text{stationär}$$

unter den K Nebenbedingungen

$$f_s(x_1, ..., x_M) = 0 \qquad (s = 1, ..., K)\ .$$

Zeigen Sie, dass dann Parameter (sogenannte Lagrange-Parameter) $\lambda_1, ..., \lambda_K$ existieren, so dass der stationäre Punkt durch

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(F(x_1, ..., x_M) + \sum_{s=1}^{K} \lambda_s f_s(x_1, ..., x_M)\right) = 0$$

bestimmt ist und folgen Sie dabei der Anleitung:

a) Lösen Sie (formal) die K Nebenbedingungen nach $x_1, ..., x_K$ auf, d.h. definieren Sie Funktionen

$$\widetilde{x}_i(x_{K+1}, ..., x_M) \qquad \text{für } i = 1, ..., K\ ,$$

so dass für *beliebige* $x_{K+1}, ..., x_M$

$$\widetilde{f}_s(x_{K+1}, ..., x_M) \equiv f_s(\widetilde{x}_1(x_{K+1}, ..., x_M), ..., \widetilde{x}_K(x_{K+1}, ..., x_M), x_{K+1}, ..., x_M) = 0 \qquad (s = 1, ..., K)\ .$$

Zeigen Sie damit, dass für $x_1, ..., x_M$, die die Nebenbedingungen erfüllen

$$(*) \qquad 0 = \sum_{r=1}^{K} \frac{\partial f_s}{\partial x_r}\frac{\partial \widetilde{x}_r}{\partial x_j} + \frac{\partial f_s}{\partial x_j} \qquad \text{für } j = K+1, ..., M \quad !$$

b) Definieren Sie jetzt

$$\widetilde{F}(x_{K+1}, ..., x_M) \equiv F(\widetilde{x}_1(x_{K+1}, ..., x_M), ..., \widetilde{x}_K(x_{K+1}, ..., x_M), x_{K+1}, ..., x_M)\ .$$

Warum ist der unter den Nebenbedingungen stationäre Punkt durch

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{F}(x_{K+1}, ..., x_M) = 0$$

(für $j = K+1, ..., M$) bestimmt?

c) Begründen Sie die Bestimmungsgleichungen

$$(**) \qquad 0 = \sum_{r=1}^{K} \frac{\partial F}{\partial x_r}\frac{\partial \widetilde{x}_r}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial x_j} \qquad (j = K+1, ..., M)$$

für $x_{K+1}, ..., x_M$ bzw. für $x_1, ..., x_M$, die die Nebenbedingungen erfüllen!

d) Definieren Sie die $K \times K$-Matrix S mit Elementen $S_{sr} = \partial f_s / \partial x_r$ $(s, r = 1, ..., K)$ und die Lagrange-Parameter

$$\lambda_s \equiv - \sum_{r=1}^{K} \frac{\partial F}{\partial x_r} S_{rs}^{-1} ,$$

(wobei die Funktionen auf der rechten Seite am stationären Punkt ausgewertet werden) und zeigen Sie, dass (per definitionem) für $j = 1, ..., K$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(F(x_1, ..., x_M) + \sum_{s=1}^{K} \lambda_s f_s(x_1, ..., x_M) \right) = 0$$

am stationären Punkt!

e) Zeigen Sie jetzt mit $(*)$ und $(**)$, dass für $j = K + 1, ..., M$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(F(x_1, ..., x_M) + \sum_{s=1}^{K} \lambda_s f_s(x_1, ..., x_M) \right) = 0$$

am stationären Punkt!

Aufgabe 45 — Kettenlinie
Die Enden einer Kette mit konstanter Massendichte μ (Masse pro Längeneinheit) und Länge L werden an den Punkten $(x_1, 0, z_1)$ und $(x_2, 0, z_2)$ in der x-z-Ebene befestigt. Die Fallbeschleunigung ist $\boldsymbol{g} = (0, 0, -g)$. Welche Form $z(x)$ hat die Kette im Gleichgewicht?

a) Begründen Sie dazu zunächst, dass sich $z(x)$ aus

$$\delta \int dx \left(\mu g z(x) \sqrt{1 + z'(x)^2} - \lambda \sqrt{1 + z'(x)^2} \right) = 0$$

bestimmen lässt!

b) Zeigen Sie jetzt, dass daraus

$$1 + z'(x)^2 - (z(x) - z_0) z''(x) = 0$$

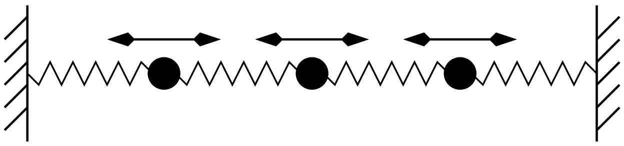
folgt! $(z_0 = \lambda / \mu g)$.

c) Zeigen Sie, dass

$$z(x) = a \cosh((x - x_0)/a)$$

für beliebige x_0 und a eine Lösung ist!

Aufgabe 46 — Lineare Kette mit festen Rändern
Drei gleiche Massen m sind über vier gleiche Federn (Federkonstante k) zwischen zwei Wänden verbunden und können entlang der Verbindungslinien (longitudinal) schwingen:



a) Wählen Sie die Auslenkungen aus den Gleichgewichtspositionen als generalisierte Koordinaten, und stellen Sie die Lagrange-Funktion $L = T - U$ auf!

b) Zeigen Sie, dass sich T und U schreiben lassen als:

$$T = \frac{m}{2}\dot{q}^T\dot{q}\ , \qquad U = \frac{k}{2}q^T\underline{V}q$$

mit $q^T = (q_1, q_2, q_3)$ und

$$\underline{V} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad !$$

c) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Gleichungen als

$$m\ddot{q} + k\underline{V}q = 0$$

geschrieben werden können!

d) Verwenden Sie den Ansatz

$$q(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))^T = \tilde{q}e^{-i\omega t}$$

mit Konstanten $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3)^T$ und einer Frequenz ω, und zeigen Sie, dass $(\omega^2\mathbf{1} - (k/m)\underline{V})\tilde{q} = 0$!

e) Zeigen Sie, dass die ω^2 gegeben sind als k/m mal den Eigenwerten von $\underline{V}$, und berechnen Sie diese!

f) Bestimmen Sie die Eigenvektoren, und interpretieren Sie das Resultat!

Aufgabe 47 — Invarianz der Feldgleichungen
Zeigen Sie direkt (d.h. ohne Ausnutzen des Wirkungsprinzips), dass die Lagrange-Gleichungen für ein Feld $\varphi_n(\boldsymbol{r}, t)$ mit N Komponenten $(n = 1, ..., N)$ unter der Transformation

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} + \frac{d}{dt}\Lambda_0 + \sum_{i=1}^{3}\frac{d}{dx_i}\Lambda_i$$

für die Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_r, \nabla\varphi_r, \partial_t\varphi_r, \boldsymbol{r}, t)$ invariant bleiben! Die Funktionen $\Lambda_0 = \Lambda_0(\varphi_r(\boldsymbol{r}, t), \boldsymbol{r}, t)$ und $\Lambda_i = \Lambda_i(\varphi_r(\boldsymbol{r}, t), \boldsymbol{r}, t)$ sind dabei beliebig.

Aufgabe 48 — Schrödinger-Gleichung
Die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}i\hbar(\Psi^*\partial_t\Psi - \Psi\partial_t\Psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\Psi^*\nabla\Psi - V\Psi^*\Psi$$

liefert die Feldgleichung (Schrödinger-Gleichung):

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi\ .$$

Zeigen Sie, dass die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}' = i\hbar\Psi^*\partial_t\Psi - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\Psi^*\nabla\Psi - V\Psi^*\Psi$$

zur gleichen Feldgleichung führt! Überprüfen Sie das für beide Felder, d.h. für Ψ und für Ψ^*!

Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$ durch eine Eichtransformation verkoppelt sind (so dass also notwendigerweise dieselbe Feldgleichung resultieren musste)!