Übungen zur Klassischen Feldtheorie

Aufgabe 35 — Homogenes elektrisches Feld
Betrachten Sie ein Teilchen der Ladung q in einem homogenen und zeitlich konstanten elektrischen Feld $\boldsymbol{E}_0$.

a) Welche Kraft wirkt auf das Teilchen?

b) Zeigen Sie, dass das System durch das generalisierte geschwindigkeitsabhängige Potenzial

$$U(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = q\boldsymbol{E}_0\dot{\boldsymbol{r}}t$$

beschrieben werden kann, indem Sie die Kraft berechnen, die sich aus diesem Potenzial ableitet!

c) Geben Sie die Lagrange-Funktion an, und stellen Sie die Lagrange-Gleichungen zweiter Art auf!

d) Wie lautet der zum Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ gehörige generalisierte Impuls $\boldsymbol{p}_{\mathrm{gen}}$? Warum ist er eine Erhaltungsgröße?

e) Vergleichen Sie das oben gegebene generalisierte Potenzial mit dem allgemeinen Ausdruck für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld, und geben Sie Φ und $\boldsymbol{A}$ an für den hier betrachteten Fall an!

f) Vergleichen Sie mit in der Vorlesung angegeben Potenzial

$$\overline{U}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = V(\boldsymbol{r}) = -q\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{r}$$

und diskutieren Sie den Energieerhaltungssatz in den beiden Fällen!

Aufgabe 36 — Euler-Lagrange-Gleichung
Betrachten Sie das Funktional

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, L(x, y(x), y'(x), y''(x)) \; .$$

Die Randwerte

$$y(x_1) = y_1 \; , \quad y(x_2) = y_2 \; , \quad y'(x_1) = Y_1 \; , \quad y'(x_2) = Y_2$$

seien vorgegeben. Stellen Sie die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf!

Aufgabe 37 — Großkreise
Zwei Punkte P_1 und P_2 liegen auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius R. Betrachten Sie Kurven auf der Kugeloberfläche, die P_1 und P_2 verbinden, und zeigen Sie mit den Mitteln der Variationsrechnung, dass die kürzeste Verbindung durch einen Großkreisbogen (ein Stück eines Kreises vom Radius R) gegeben ist!

Hinweis: Benutzen Sie Kugelkoordinaten, und treffen Sie eine zweckmäßige Wahl der Koordinatenachsen, um die Rechnung zu vereinfachen!

Aufgabe 38 — Stationäre Wirkung
Die Lagrange-Funktion

$$L(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz$$

beschreibt die Bewegung eines Teilchens im Schwerefeld. Berechnen Sie das Wirkungsfunktional

$$S[z(t)] = \int_0^{t_0} dt\, L(z(t), \dot{z}(t))$$

für

$$z(t) = -\frac{g}{2} t^2 + \Delta z(t)$$

mit beliebiger Funktion $\Delta z(t)$, wobei allerdings $\Delta z(t_0) = \Delta z(0) = 0$ gelten soll!

Zeigen Sie damit, dass das Wirkungsfunktional für die tatsächliche Bahn nicht nur stationär sondern in diesem Fall auch minimal wird!