Übungen zur Klassischen Feldtheorie

Aufgabe 17 — Feld einer geradlinig gleichförmig bewegten Punktladung
Eine Punktladung q bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit v in x-Richtung. Dadurch wird ein elektrisches Feld

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2\vartheta)^{3/2}} \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}$$

erzeugt (siehe Vorlesung). $\boldsymbol{R}$ ist hier der Vektor vom Teilchen zum Beobachtungspunkt und ϑ der Winkel, den $\boldsymbol{R}$ mit $\boldsymbol{e}_x$ einschließt.

Zeigen Sie, dass das Gaußsche Gesetz

$$\oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{a} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

erfüllt ist! (Integrieren Sie über die Oberfläche einer Kugel.)

Aufgabe 18 — Gradient und Hyperfläche
Zeigen Sie, dass der (D-dimensionale) Gradient der Funktion $f(x_1, x_2, ..., x_D)$ in jedem Punkt senkrecht auf der durch $f(x_1, x_2, ..., x_D) = 0$ gegebenen ($D-1$-dimensionalen Hyper-)Fläche steht!

Aufgabe 19 — Zerlegung des Gesamtdrehimpulses
Gegeben ist ein System aus N Punktteilchen mit Massen m_i ($i = 1, ..., N$). Der Gesamtdrehimpuls des Systems bezüglich des Ursprungs O eines Inertialsystems ist

$$\boldsymbol{L} = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{L}_{MMP} + \boldsymbol{L}' ,$$

wobei $\boldsymbol{L}_{MMP}$ der Drehimpuls des Massenmittelpunkts mit Gesamtmasse M bezüglich O ist und $\boldsymbol{L}'$ der Gesamtdrehimpuls des Systems bezüglich seines Massenmittelpunkts.

Zeigen Sie die Gültigkeit dieser Beziehung und geben Sie $\boldsymbol{L}_{MMP}$ und $\boldsymbol{L}'$ an!

Aufgabe 20 — Virtuelle Verrückungen – 1
Eine virtuelle Verrückung δx_j ($j = 1, ..., 3N$) ist infinitesimal, momentan und verträglich mit allen Zwangsbedingungen. Geben Sie 3 Beispiele, bei denen jeweils genau eines der 3 Charakteristika einer virtuellen Verrückung *nicht* erfüllt ist, und diskutieren Sie anschaulich, ob in diesen Fällen virtuelle Arbeit von den Zwangskräften verrichtet würde!

Aufgabe 21 — Virtuelle Verrückungen – 2
Gegeben ist die Zwangsbedingung

$$f(\boldsymbol{r}, t) = r^2 - k_0 t$$

mit einer Konstanten $k_0 > 0$.
Berechnen Sie das totale Differenzial von f!
Geben Sie damit die gesamte Klasse der für $t = t_0$ möglichen virtuellen Verrückungen an!

Aufgabe 22 — Differenzielle Zwangsbedingungen
Für ein Ein-Teilchen-System sei die folgende differenzielle Zwangsbedingung gegeben:

$$x_2 x_3 t dx_1 + x_1 x_3 t dx_2 + x_1 x_2 t dx_3 + x_1 x_2 x_3 dt = 0 \; .$$

a) Schreiben Sie die Zwangsbedingung in der Form $f(x, \dot{x}, t) = 0$, d.h. als Differenzialgleichung!

b) Prüfen Sie die Integrabilitätsbedingungen, und zeigen Sie, dass Zwangsbedingung holonom ist!

c) Schreiben Sie die Zwangsbedingung in der Form $f(x, t) = 0$! Nehmen Sie dabei an, dass sich das Teilchen zur Zeit $t = t_0$ bei $x_1 = x_2 = x_3 = c_0$ befindet (c_0 ist eine Konstante).

d) In welche Richtung zeigt die Zwangskraft zur Zeit $t = t_0$?

e) da sei eine infinitesimale Länge. Für welches γ ist

$$\delta\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} da$$

eine virtuelle Verrückung zur Zeit $t = t_0$?