Übungen zur Klassischen Feldtheorie

Aufgabe 9 — γ-Faktoren
Gegeben seien die Inertialsysteme IS$_0$, IS und IS$'$.
IS$_0$ bewege sich relativ zu IS mit Geschwindigkeit v_0 entlang der x-Achse.
IS$_0$ bewege sich relativ zu IS$'$ mit Geschwindigkeit v_0' entlang der x'-Achse.
IS' bewege sich relativ zu IS mit Geschwindigkeit v entlang der x-Achse.

a) Begründen Sie, dass

$$v_0' = \frac{v_0 - v}{1 - vv_0/c^2} \quad !$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\gamma_0'}{\gamma_0} = \left(1 - \frac{vv_0}{c^2}\right)\gamma \, ,$$

wobei

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \, , \qquad \gamma_0' = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0'^2/c^2}} \, , \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad !$$

c) Ein Körper bewege sich um dx_0 in der Zeit dt, wie anhand einer Längen- bzw. Zeitmessung in IS festgestellt wird. In IS$'$ ergibt sich dx_0' und dt' für denselben Körper. Zeigen Sie (mithilfe von b), dass

$$\frac{dt}{\gamma_0} = \frac{dt'}{\gamma_0'}$$

wobei $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$ und $\gamma_0' = 1/\sqrt{1 - v_0'^2/c^2}$ und $v_0 = dx_0/dt$ und $v_0' = dx_0'/dt'$.

Aufgabe 10 — Relativistische Verfolgung
Ein Wagen mit ausgebrochenen Sträflingen verlässt die Stadt auf der Autobahn mit Geschwindigkeit $3c/4$. Ein Polizeiwagen nimmt die Verfolgung mit Geschwindigkeit $c/2$ auf. Einer der Beamten zielt auf die Reifen des Sträflingswagens und feuert einen Schuss ab. Die Geschwindigkeit der Kugel (relativ zur Pistole) beträgt $c/3$. Erreicht die Kugel das Ziel?

a) Führen Sie die Rechnung nach Galilei durch!

b) Führen Sie die Rechnung nach Einstein durch!

Aufgabe 11 — Minkowski-Kraft
Ein Punktteilchen mit Ladung q bewege sich im elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$. Zur Zeit t besitze es die Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$. Zeigen Sie, dass für die Komponente K^0 der Minkowski-Kraft K^μ, die auf das Teilchen wirkt,

$$K^0 = \frac{1}{c}\gamma\frac{dW}{dt}$$

gilt! W ist hier die relativistische Energie des Teilchens. Zeigen Sie desweiteren, dass

$$K^0 = \frac{q}{c}\gamma \boldsymbol{u}\boldsymbol{E}\,!$$

Aufgabe 12 — Vierer-Skalarprodukt
A^μ und B^μ seien Vierervektoren. Definiere $g_{\mu\nu}$ durch

$$g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu$$

und

$$g_{00} = 1\,, \quad g_{11} = -1\,, \quad g_{22} = -1\,, \quad g_{33} = -1\,.$$

Außerdem sei $g^{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}$ für alle $\mu, \nu \in \{0,1,2,3\}$. (g heißt metrischer Tensor).

a) Zeigen Sie, dass

$$(A_\mu) = (A^0, -\boldsymbol{A})$$

ist, wobei

$$A_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} A^\nu$$

definiert ist! (A^μ heißt kontravarianter und A_μ heißt kovarianter Vierervektor).

b) Zeigen Sie, dass sich das Minkowski-Skalarprodukt von A^μ mit B^μ folgendermaßen schreiben lässt:

$$A \circ B = \sum_{\mu\nu} A^\mu g_{\mu\nu} B^\nu = \sum_\mu A_\mu B^\mu = \sum_\mu A^\mu B_\mu\,,$$

c) Betrachten Sie die Lorentz-Transformation L^μ_ν:

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\,,$$

(nur die von Null verschiedenen Elemente sind angegeben) und zeigen Sie, dass

$$\underline{L}\underline{g}\underline{L} = \underline{g}\,, \quad \text{d.h.} \quad \sum_{\rho\sigma} L^\mu_\rho g^{\rho\sigma} L^\nu_\sigma = g^{\mu\nu}$$

d) Benutzen Sie dieses Resultat, um zu zeigen, dass

$$A' \circ B' = A \circ B\,,$$

dass also das Vierer-Skalarprodukt eine Lorentz-Invariante ist!