# Übungen zur Klassischen Feldtheorie

**Aufgabe 5 — Infinitesimale Drehungen**
Der infinitesimale Vektor $d\boldsymbol{u}$ sei gegeben.

a) Zeigen Sie anschaulich, dass die Transformation

$$\boldsymbol{r} \mapsto \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + d\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{r}$$

eine Drehung beschreibt!

b) Welche anschauliche Bedeutung hat der Vektor $d\boldsymbol{u}$?

c) Zwei infinitesimale Drehungen, beschrieben durch $d\boldsymbol{u}_1$ und $d\boldsymbol{u}_2$ seien gegeben. Sind die Drehungen kommutativ?

d) Betrachten Sie eine Transformation $\boldsymbol{r}' = \underline{D}\boldsymbol{r}$, die infinitesimal von der Einheitstransformation abweicht:

$$\underline{D} = \underline{1} + \underline{\Omega} d\varphi \, .$$

Welche Eigenschaft muss die Matrix $\underline{\Omega}$ haben, damit $\underline{D}$ eine Drehmatrix ist? Rechnen Sie bis zur ersten Ordnung in $d\varphi$!

e) Kann jeder infinitesimalen Drehung ein Vektor $d\boldsymbol{u}$ zugeordnet werden? Welcher?

**Aufgabe 6 — Gruppe der Galilei-Transfomationen**
Für feste aber beliebige Parameter $\boldsymbol{\alpha} = (t_0, \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{v}_0, \underline{D})$ ist eine (allgemeine) Galilei-Transformation $G : (\boldsymbol{r}, t) \mapsto (\boldsymbol{r}', t')$ durch

$$\boldsymbol{r}' = \underline{D}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}_0 t - \boldsymbol{r}_0 \, , \quad t' = t - t_0$$

gegeben (mit orthogonaler Matrix $\underline{D}$, also $\underline{D}\underline{D}^T = \mathbf{1}$). $G$ ist also durch $\boldsymbol{\alpha}$ eindeutig bestimmt: $G = G_{\boldsymbol{\alpha}}$.

a) Betrachten Sie die Hintereinanderausführung zweier Galilei-Transformationen: $G_{\alpha''} = G_{\alpha'} \circ G_{\alpha}$, und geben Sie die Parameter $\alpha''$ als Funktionen der Parameter $\alpha$ und $\alpha'$ an!

b) Zeigen Sie, dass die Galilei-Transformationen eine Gruppe bilden!

c) Ist die Galilei-Gruppe kommutativ?

**Aufgabe 7 — Gruppe der speziellen Lorentz-Transformationen**
Gegeben sind die speziellen Lorentz-Transformationen

$$\underline{L}_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 & & \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{L}_2 = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\beta_2\gamma_2 & & \\ -\beta_2\gamma_2 & \gamma_2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(nur die von 0 verschiedenen Elemente sind eingetragen), wobei

$$\beta_1 = v_1/c\,, \qquad \gamma_1 = 1/\sqrt{1-\beta_1^2}\,.$$

$\beta_2$ und $\gamma_2$ sind analog definiert.

a) Zeigen Sie, dass $\underline{L} \equiv \underline{L}_1 \cdot \underline{L}_2$ wiederum eine spezielle Lorentz-Transformation ist, und geben Sie das zugehörige $\beta$ bzw. $\gamma$ an!

b) Zeigen Sie, dass $\underline{L}_1$ und $\underline{L}_2$ kommutierende Transformationen sind! Bilden die speziellen Lorentz-Transformationen eine Gruppe?

c) Kommutieren spezielle Lorentz-Transformationen mit räumlichen Drehungen?

**Aufgabe 8 — Zeitdilatation**
Eine Rakete verlässt die Erde mit der Geschwindikeit (3/5)c. Nach 1 Stunde, gemäß einer Uhr in der Rakete, wird ein Lichtsignal zurück zur Erde geschickt.

a) Wann, nach Erdzeit, wird das Lichtsignal abgeschickt?

b) Wie lange dauert es nach dem Start der Rakete, gemessen durch eine Uhr auf der Erde, bis das Signal auf der Erde ankommt?

c) Wie lange dauert es, bis das Signal auf der Erde ankommt, gemessen durch einen Beobachter in der Rakete?