10.7 Abelsche Eichtheorie

geladene Teilchen: komplexes Feld $\varphi(x)$

$$\mathcal{L}_0 = \sum_\mu \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi^* \varphi$$

beschreibt freie Teilchen!

Wechselwirkung? (elektromagnetisch, Teilchen sind geladen)

beachte:

$\mathcal{L}_0$ ist invariant unter <u>globalen Eichtransformationen</u>

$$\varphi(x) \mapsto \varphi'(x) = U \varphi(x) \qquad \text{mit } U = e^{iq\Lambda}$$
$$\varphi^*(x) \mapsto \varphi'^*(x) = U^* \varphi^*(x) \qquad \text{und } \Lambda = \text{const}$$

denn

$$\varphi^* \varphi = \varphi'^* \varphi', \quad \partial_\mu \varphi^* \cdot \partial^\mu \varphi = \partial_\mu \varphi'^* \partial^\mu \varphi'$$

aber $\mathcal{L}_0$ ist nicht invariant unter <u>lokalen Eichtransformationen</u>

denn:

eine <u>lokale</u> Transformation ist allerdings dem Feldkonzept sehr viel verwandter $\rightarrow$

grundlegende <u>Forderung</u> an eine (Eich-)Feldtheorie:

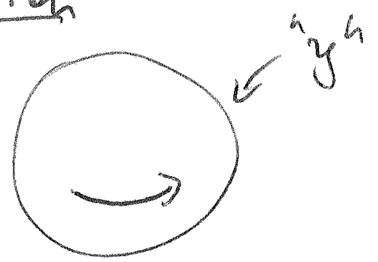
- impliziert, dass $\mathcal{L}_0$ modifiziert werden muss
- die Modifikation gelingt nur durch Ankopplung des <u>Materiefelds</u> ψ, ψ^* an ein <u>Eichfeld</u> A^μ
- dadurch wird der fehlende Wechselwirkungsterm generiert, daher:

<u>„dynamisches Prinzip der Eichinvarianz“</u>

- das Eichprinzip liegt allen Eichtheorien (und insbesondere dem Standardmodell) zugrunde
- $\mathcal{L}$ kann sehr kompliziert sein, wird aber fast vollständig durch das Eichprinzip vorgeschrieben

Veranschaulichung:

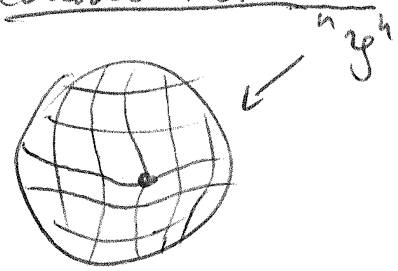
<u>Rotation</u>



Invarianz unter globalen Eichtrsf.

$e^{iq\Lambda}$

<u>lokale Rotation</u>



Invarianz unter lokalen Eichtrsf.

$e^{iq\Lambda(x)}$

Invarianz nur bei gleichzeitiger Eichtransformation der Eichfelder

(schon bekannte Eichtransformation der Potenziale in der Elektrodynamik)

im anschaulichen Bild: lokale Rotation bewirkt Rückstellkräfte

Durch welche Modifikation von $\mathcal{L}_0$ kann lokale Eichinvarianz hergestellt werden?

Prinzip der minimalen Substitution

Beweis:

(nur für den Ableitungsterm $\sum_\mu \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi$; der Masseterm $\sim \psi^*\psi$ ist schon eichinvariant)

z.z.: $\sum_\mu (D_\mu \psi)^* (D^\mu \psi)$ ist invariant

unter $\psi \mapsto \psi' = U\psi = e^{iq\Lambda}\psi$

und $A^\mu \mapsto A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Lambda$

es gilt für beliebiges $\Lambda = \Lambda(x)$:

damit folgt

$$\sum_\mu (D_\mu \psi)^* (D^\mu \psi) \mapsto \sum_\mu (U D_\mu \psi)^* (U D^\mu \psi)$$

$$= \sum_\mu (D_\mu \psi)^* \underbrace{U^* U}_{=1} D^\mu \psi = \sum_\mu (D_\mu \psi)^* D^\mu \psi$$

✓

Anwendung des Eichprinzips: $\mathcal{L}_0 \to \tilde{\mathcal{L}}$

- lokal eichinvariant ($\mathcal{L}_0$ nicht)
- beinhaltet Kopplung an Eichfeld A^μ

Herleitung (!) des Wechselwirkungsterms:

$$\boxed{\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{WW}}$$ mit

$$\mathcal{L}_0 = \sum_\mu \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\varphi^*\varphi$$

Das Eichprinzip generiert die Wechselwirkung!

Für eine vollständige Theorie (wechselwirkende skalare Mesonen $\pi^\pm$) fehlt noch der "kinetische" Anteil des Eichfelds

$$\boxed{\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4\mu_0}\sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}$$

$U(1)$ - Eichtheorie $\qquad \psi' = U\psi \qquad U = e^{iq\Lambda}$

$SU(2)$ - Eichtheorie $\qquad \begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \end{pmatrix} = \underline{U} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$

$\underline{U}$: 2×2 - Matrix mit

$\underline{U}\,\underline{U}^{+} = \underline{U}^{+}\underline{U} = \mathbb{1}$ und

$\det \underline{U} = +1$

$SU(N)$ - Eichtheorie $\qquad \underline{U} \in SU(N)$

<u>allgemeine</u> Konstruktion des Feldstärketensors:

für $U(1)$ gilt:

$$D^\mu D^\nu \psi = (\partial^\mu + iqA^\mu)(\partial^\nu + iqA^\nu)\psi$$

$$= \partial^\mu \partial^\nu \psi + iq\,\partial^\mu (A^\nu \psi) + iq\,A^\mu(\partial^\nu \psi) - q^2 A^\mu A^\nu \psi$$

$$= \partial^\mu \partial^\nu \psi + iq(\partial^\mu A^\nu)\psi + iq\,A^\nu(\partial^\mu \psi) + iq\,A^\mu(\partial^\nu \psi)$$
$$- q^2 A^\mu A^\nu \psi$$

also:

$$D^\mu D^\nu \psi - D^\nu D^\mu \psi = iq(\partial^\mu A^\nu)\psi - iq(\partial^\nu A^\mu)\psi$$

$$D^\mu D^\nu - D^\nu D^\mu = iq(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad \checkmark$$

vollständige $U(1)$-Eichtheorie:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \varphi^*, \partial_\mu \varphi, \partial_\mu \varphi^*, A_\mu, \partial_\mu A_\nu)$$

$$\mathcal{L} = \sum_\mu \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \varphi^* \varphi$$
$$- iq \sum_\mu (\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^*) A^\mu$$
$$+ q^2 \sum_\mu A_\mu A^\mu \varphi^* \varphi$$
$$- \frac{1}{4\mu_0} \sum_{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$\mathcal{L}$ ist invariant unter globaler $U(1)$-Eichtrafo.

$$\varphi \mapsto \varphi' = U\varphi = e^{iq\Lambda} \varphi \qquad (A^\mu \text{ fest})$$

also (Noether): $\sum_\mu \partial_\mu j^\mu = 0$ mit

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial \Lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \Lambda} \Big|_{\Lambda=0}$$

$$= \partial^\mu \varphi^* (-iq) \varphi - iq \varphi^* A^\mu (-iq) \varphi$$
$$+ \partial^\mu \varphi \, iq \varphi^* + iq \varphi A^\mu \, iq \varphi^*$$

$$= iq\,(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi\, \partial^\mu \varphi^*) - 2q^2 \varphi^* \varphi A^\mu$$

also

$$\boxed{\begin{aligned} j^\mu &= j_0^\mu - 2q^2 \varphi^* \varphi A^\mu \\ j^\mu &= j_0^\mu \Big|_{\partial^\mu \mapsto \partial^\mu + iqA^\mu} \end{aligned}}$$

<u>Feldgleichungen</u>:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} - \sum_\mu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)}$$

wegen $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ gilt:

also:

weiter gilt:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \sum_\nu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}$$

also:

---

beachte:

$$\mathcal{L} \mapsto \hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \underbrace{\frac{1}{2} m^2 \sum_\mu A_\mu A^\mu}_{\text{Masseterm, } m\text{: Photonenmasse}} = \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}$$

$\Delta\mathcal{L}$ ist nicht eichinvariant!

$$\Delta\mathcal{L} \mapsto \frac{1}{2} m^2 \sum_\mu (A_\mu - \partial_\mu \Lambda)(A^\mu - \partial^\mu \Lambda) \neq \Delta\mathcal{L}$$

also:

Eichtheorien nur formulierbar für masselose Austauschteilchen (masselose Eichfelder)

U(1):

schwache WW: