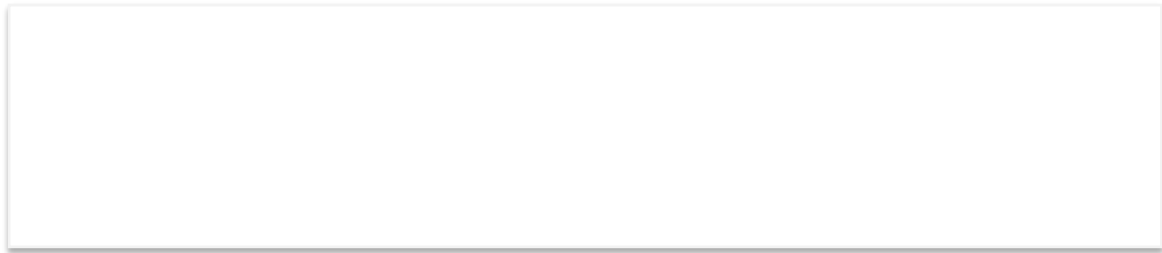


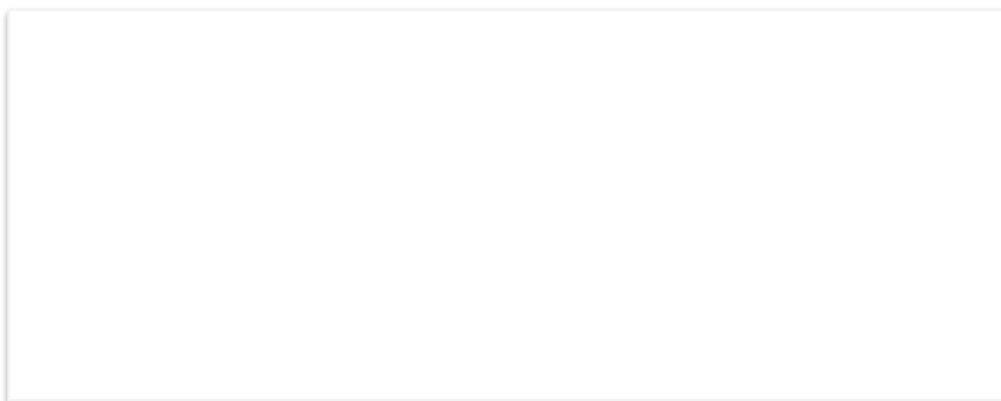
10.6 Freie skalare Feldtheorie

neutrale Teilchen ohne interne Freiheitsgrade



- φ reell (\rightarrow keine erhaltene Ladung)
- \mathcal{L} Lorentz-Skalar
- \mathcal{L} quadratisch in den Feldern
(\rightarrow lineare Feldgleichung, lösbar, keine WW)
- \mathcal{L} mit ersten Ableitungen des Felds
(\rightarrow Feldgleichung DGL 2. Ordnung)
- keine interne Freiheitsgrade:
einkomponentiges Feld
- "Teilchen": Welle-Teilchen-Dualismus
in der QM (bzw. Q-Feldtheorie)

Feldgleichung:



⇒

Klein-Gordon-Gleichung

allg. Lösung: Superposition ebener Wellen

Ansatz:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\hbar^2 \omega^2 = \pm \sqrt{c^2 (\hbar k)^2 + m^2 c^4}}$$

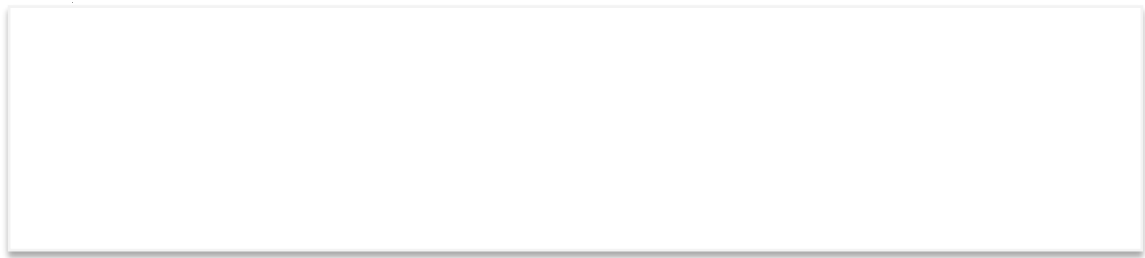
(relativistische Energie-Impuls-Relation)

- ψ^* ist ebenfalls Lösung, $\frac{1}{2}(\psi + \psi^*)$ ebenfalls
 $\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 \operatorname{Re} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$ ist reelle Lösung

- $\psi(x) = \psi_0 \exp\left(-i \sum_{\mu} k_{\mu} x^{\mu}\right)$ mit

$$x^{\mu} = (ct, \vec{r})^T \quad k^{\mu} = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)^T \quad k_{\mu} = \left(\frac{\omega}{c}, -\vec{k}\right)$$

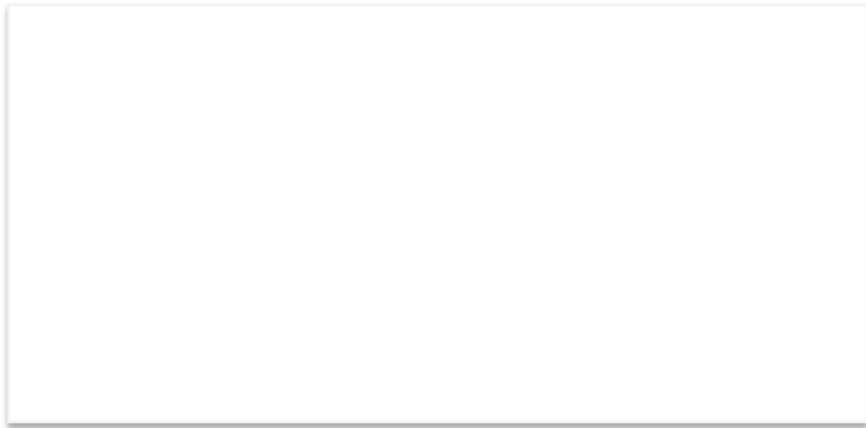
Verallgemeinerung auf geladene Teilchen:



komplexes Feld ψ , ψ und ψ^* unabhängig

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \sum_{\mu} \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \psi)} = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi^* - \sum_{\mu} \partial_{\mu} \psi^*$$

äquivalent zur Feldgleichung für ψ



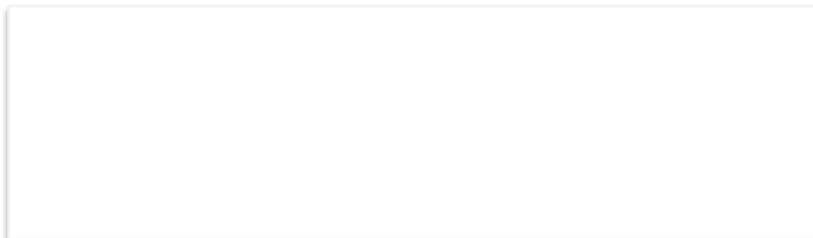
Lösung:

$$\psi(x) = \psi_0 e^{-i \sum_{\mu} k_{\mu} x^{\mu}}$$

$$\hbar \omega = \pm \sqrt{c^2 (\hbar k)^2 + m^2 c^4}$$

alles analog zum reellen Fall, aber:

\mathcal{L} ist invariant unter der $U(1)$ -Eichtransformation

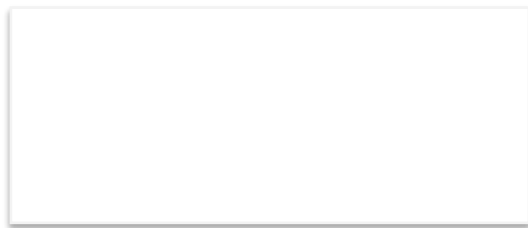


mit $\lambda = \text{const}$ (kontinuierlicher Parameter)

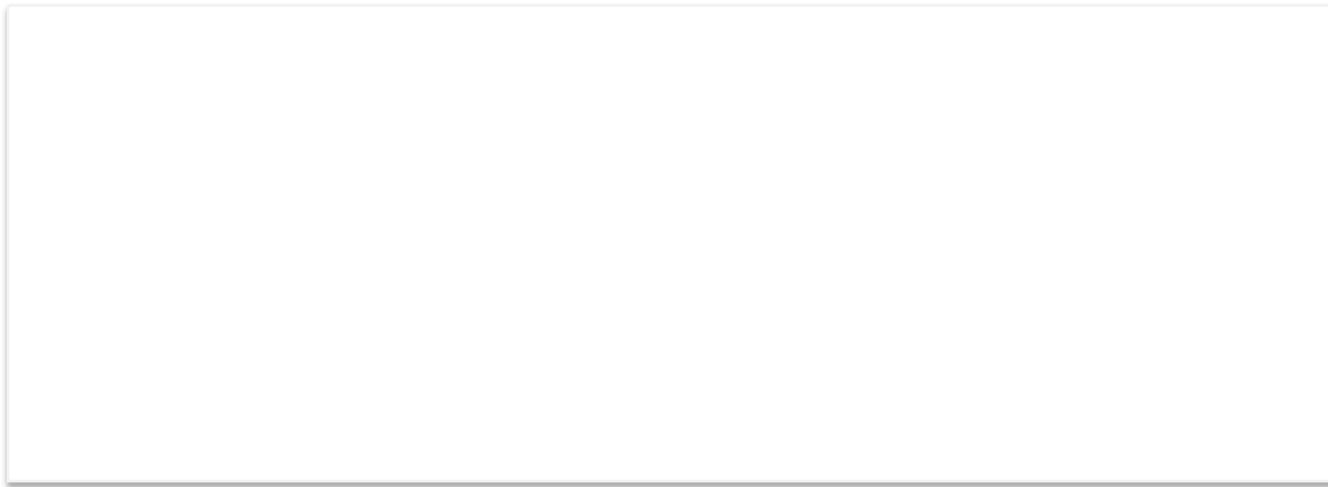
g : feste, reelle "Kopplungskonstante"

Schreibe $y = e^{-i\eta\lambda} y^l$ $y^* = e^{+i\eta\lambda} y^{l*}$

nach dem Noether-Theorem gilt denn



mit



mit $y = y_0 e^{-i\sum_k k^k x^k}$ und

$\partial^k y = -i k^k y$, $\partial^k y^* = i k^k y^*$ ist:

$$j^k = ig (y^* (-i k^k) y - y i k^k y^*)$$

$$j^k = 2g k^k y^* y$$

für eine Lösung mit $k^\mu \mapsto -k^\mu$

(d.h. negativer Viererimpuls mit negativer Energie)
ist

$$j^\mu = 2q (-k^\mu) \psi^* \psi$$

bzw.

$$j^\mu = 2(-q) k^\mu \psi^* \psi$$

Der von einem Teilchen (\bar{a}^+ , Ladung $q = +e$)
mit 4er-Impuls $-p^\mu = -t k^\mu$ hervorgerufene
Strom ist identisch mit dem Strom verursacht
durch ein Antiteilchen (\bar{a}^- , Ladung $q = -e$)
mit Impuls p^μ

\mathcal{L} beschreibt Teilchen und zugehörige Antiteilchen
(Feynman-Strickelberg-Interpretation)

allg. Lsg. der Klein-Gordon-Gleichung:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int d^3k (\psi_+(k) e^{-i\sum k_\mu x^\mu} + \psi_-(k) e^{+i\sum k_\mu x^\mu}) \\ &= \psi_+(x) + \psi_-(x) \quad +/-: \text{pos./neg. Energie} \end{aligned}$$

neutrale Teilchen: $\psi(x)$ reell, $\psi_-(x) = \psi_+(x)^*$

\Rightarrow Teilchen und Antiteilchen identisch