10.6 Freie skalare Feldtheorie

neutrale Teilchen ohne innere Freiheitsgrade

- φ reell (→ keine erhaltene Ladung)
- $\mathcal{L}$ Lorentz-Skalar
- $\mathcal{L}$ quadratisch in den Feldern
  (→ lineare Feldgleichung, lösbar, keine WW)
- $\mathcal{L}$ mit ersten Ableitungen des Felds
  (→ Feldgleichung DGL 2. Ordnung)
- keine inneren Freiheitsgrade:
  einkomponentiges Feld
- „Teilchen": Welle-Teilchen-Dualismus
  in der QM (bzw. Q-Feldtheorie)

Feldgleichung:

$\Rightarrow$

Klein-Gordon-Gleichung

allg. Lösung: Superposition ebener Wellen

Ansatz:

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_0\, e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hbar^2\omega^2 = \pm\sqrt{c^2(\hbar k)^2 + m^2c^4}}$$

(relativistische Energie-Impuls-Relation)

- ψ^* ist ebenfalls Lösung, $\frac{1}{2}(\psi+\psi^*)$ ebenfalls
  $\psi(\vec{r},t) = \psi_0 \,\mathrm{Re}\, e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ ist <u>reelle</u> Lösung
- $\psi(x) = \psi_0 \exp\left(-i\sum_\mu k_\mu x^\mu\right)$ mit

  $x^\mu = (ct, \vec{r})^T \quad k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})^T \quad k_\mu = (\frac{\omega}{c}, -\vec{k})$

Verallgemeinerung auf geladene Teilchen:

komplexes Feld φ, φ und φ^* unabhängig

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \sum_\mu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = -\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\varphi^* - \sum_\mu \partial_\mu \partial^\mu \varphi^*$$

äquivalent zur Feldgleichung für φ

Lösung:

$$\varphi(x) = \varphi_0 \, e^{-i\sum_\mu k_\mu x^\mu}$$

$$\hbar\omega = \pm\sqrt{c^2(\hbar k)^2 + m^2c^4}$$

alles analog zum reellen Fall, <u>aber</u>:

$\mathcal{L}$ ist invariant unter der $U(1)$-Eichtransformation mit $\Lambda = \text{const}$ (kontinuierlicher Parameter)

q: feste, reelle "Kopplungskonstante"

schreibe $\psi = e^{-iq\Lambda}\psi'$ $\quad \psi^* = e^{+iq\Lambda}\psi'^*$

nach dem Noether-Theorem gilt dann

mit

mit $\psi = \psi_0 \, e^{-i\sum_\mu k_\mu x^\mu}$ und

$\partial^\mu \psi = -ik^\mu \psi$, $\partial^\mu \psi^* = ik^\mu \psi$ ist:

$$j^\mu = iq\left(\psi^*(-ik^\mu)\psi - \psi\, ik^\mu \psi^*\right)$$

$$j^\mu = 2q\, k^\mu \psi^* \psi$$

für eine Lösung mit $k^\mu \mapsto -k^\mu$

(d.h. negativer Viererimpuls mit negativer Energie)

ist

$$j^\mu = 2q\,(-k^\mu)\,\varphi^*\varphi$$

bzw.

$$j^\mu = 2(-q)\,k^\mu\,\varphi^*\varphi$$

Der von einem Teilchen (π^+, Ladung $q=+e$) mit 4er-Impuls $-p^\mu = -\hbar k^\mu$ hervorgerufene Strom ist identisch mit dem Strom verursacht durch ein Antiteilchen (π^-, Ladung $q=-e$) mit Impuls p^μ

$\mathcal{L}$ beschreibt Teilchen und zugehörige Antiteilchen (Feynman-Stückelberg-Interpretation)

allg. Lsg. der Klein-Gordon-Gleichung:

$$\varphi(x) = \int d^3k \left(\varphi_+(\vec{k})\, e^{-i\sum k_\mu x^\mu} + \varphi_-(\vec{k})\, e^{+i\sum k_\mu x^\mu} \right)$$

$$= \varphi_+(x) + \varphi_-(x) \qquad +/-:\ \text{pos./neg. Energie}$$

neutrale Teilchen: $\varphi(x)$ reell, $\varphi_-(x) = \varphi_+(x)^*$

$\Rightarrow$ Teilchen und Antiteilchen identisch