(*) es gilt

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2 = \Big(\sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_i A_j \vec{e}_k\Big)^2$$

$$= \sum_k \sum_{iji'j'} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{i'j'k} (\partial_i A_j)(\partial_{i'} A_{j'})$$

$$= \sum_{iji'j'} \underbrace{\Big(\sum_k \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{i'j'k}\Big)}_{\substack{\neq 0 \text{ nur für } i=i' \text{ und } j=j' \\ \text{oder } i=j' \text{ und } j=i'}} (\partial_i A_j)(\partial_{i'} A_{j'})$$

$$= \sum_{ij}\sum_{i'j'} \left(\delta_{ii'}\delta_{jj'} - \delta_{ij'}\delta_{ji'}\right)(\partial_i A_j)(\partial_{i'} A_{j'})$$

$$= \sum_{ij} \Big[(\partial_i A_j)(\partial_i A_j) - (\partial_i A_j)(\partial_j A_i)\Big]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i A_j)} = \Big(-\frac{1}{2\mu_0}\Big)\Big[2\,\partial_i A_j - 2\,\partial_j A_i\Big]$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left(\partial_j A_i - \partial_i A_j\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla} A_j)} = \frac{1}{\mu_0}\left(\partial_j \vec{A} - \vec{\nabla} A_j\right) \quad \checkmark$$

Feldgleichungen:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \frac{d}{d\vec{r}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\Phi)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Phi)}$$

$$= -\rho - \frac{d}{d\vec{r}} \varepsilon_0 \left(\vec{\nabla}\Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$= -\rho - \varepsilon_0 \Delta \Phi - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}\vec{A}$$

Lorentz-Eichung

$$\sum_\mu \partial_\mu A^\mu = \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{A} = 0$$

damit folgt:

$$0 = -\rho - \varepsilon_0 \Delta \Phi + \varepsilon_0 \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi$$

bzw.

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \Phi = \rho / \varepsilon_0 \qquad \checkmark$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \frac{d}{d\vec{r}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}A_i)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t A_i)}$$

$$= j_i - \frac{d}{d\vec{r}} \left(\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{A} - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} A_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} A_i \right)$$

$$= j_i - \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{\mu_0}\Delta A_i - \frac{1}{\mu_0 c^2}\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0 c^2}\frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2}$$

also

$$0 = \vec{j} - \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \Delta\vec{A} + \underbrace{\frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\frac{\partial\Phi}{\partial t}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right)$$

mit der Lorenz-Bedingung: $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A})$

und somit

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A} = \mu_0\vec{j} \qquad \checkmark$$

---

beachte:

$$\int d^3r\, \mathcal{L}_{ww} = \int d^3r\left(-\rho\,\Phi + \vec{j}\vec{A}\right) = L_{ww}$$

für N Punktteilchen ist

und damit:

→ konsistent mit der Lagrange-Funktion eines Teilchens im elektromagnetischen Feld

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\,\Phi(\vec{r},t) + q\,\dot{\vec{r}}\,\vec{A}(\vec{r},t)$$

Elektrodynamik plus nichtrelativistische Mechanik von N Punktteilchen:

$$\boxed{\delta S = 0}$$

$$S = S_{Feld} + S_{WW} + S_{Teilchen}$$

mit

$$S_{Feld} = \int dt \int d^3r \, \mathcal{L}_{Feld} \qquad \mathcal{L}_{Feld}: \text{ s.o.}$$

$$S_{Teilchen} = \int dt \, L_{Teilchen} \qquad L_{Teilchen} = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

Wechselwirkungsterm:

$$S_{WW} = \int dt \, L_{WW} = \int dt \int d^3r \, \mathcal{L}_{WW}$$

aus Teilchensicht:
(LI für die N Teilchen im gegebenen Feld)

aus Feldsicht:
(Feldgleichung für Φ, $\vec{A}$ bei gegebenen Quellen)

10.4 Energie-Impuls-Tensor

betrachte eine Feldtheorie

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi_1, \ldots, \psi_f, \partial^\mu \psi_1, \ldots, \partial^\mu \psi_f, x^\mu)$$

mit

es gilt:

mit den Feldgleichungen

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_n} - \sum_\sigma \partial^\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\sigma \psi_n)}$$

folgt:

mit $\partial_\mu \mathcal{L} = \sum_\sigma g_{\mu\sigma} \partial^\sigma \mathcal{L}$ folgt:

definiere das Tensorfeld $T_{\mu\sigma} = T_{\mu\sigma}(x)$ als:

dann gilt

oder mit

folgen die 4 Erhaltungssätze

beachte: $T^{\mu\sigma}$ ist nicht eindeutig!

sei $G^{\lambda\mu\sigma}$ ein Tensor 3. Stufe mit

dann folgt für

zur eindeutigen Festlegung des Tensors
fordern wir daher dessen Symmetrie

---

für das elektromagnetische Feld (ohne Quellen!)
folgt mit

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} \sum_{\mu\nu} \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \right) \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \right)$$

dass

es ist $T^{\mu\sigma} \neq T^{\sigma\mu}$!

wir addieren daher den Term

definiere also

Maxwellsches Tensorfeld

es gilt $\boxed{T_{n}^{\mu\sigma} = T_{n}^{\sigma\mu}}$ denn:

weiter ist T_{n} spurlos

$$\boxed{\sum_{\mu} T_{n}{}^{\mu}{}_{\mu} = 0}$$

denn:

es gilt (nach wie vor):

$$\boxed{\sum_{\mu} \partial_{\mu} T_{n}^{\mu\sigma} = 0}$$

Energie- und Impulserhaltung des elektromagnetischen Felds in Abwesenheit von Quellen sei jetzt $j^0 \neq 0$; dann gilt

10.5 Energie- und Impulsaustausch

Berechnung der Komponenten des Maxwellschen Tensors:

$$\sum_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 2\left(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{E}^2\right) \qquad (\text{s.o.})$$

$$\sum_{\rho} F^{\mu\rho} F_{\rho}{}^{\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & -\vec{E}/c & \\ \hline & 0 & -B_z & B_y \\ \vec{E}/c & B_z & 0 & -B_x \\ & -B_y & B_x & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & -\vec{E}/c & \\ \hline & 0 & B_z & -B_y \\ -\vec{E}/c & -B_z & 0 & B_x \\ & B_y & -B_x & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} \vec{E}^2/c^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \frac{1}{c}(E_y B_z - E_z B_y) & -\frac{E_x^2}{c^2} + B_y^2 + B_z^2 & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{c}(E_z B_x - E_x B_z) & -\frac{1}{c^2} E_x E_y - B_x B_y & -\frac{E_y^2}{c^2} + B_x^2 + B_z^2 & \cdot \\ \frac{1}{c}(E_x B_y - E_y B_x) & -\frac{1}{c^2} E_x E_z - B_x B_z & -\frac{1}{c^2} E_y E_z - B_y B_z & -\frac{E_z^2}{c^2} + B_x^2 + B_y^2 \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{4\mu_0}\sum_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} = \frac{1}{2\mu_0}\begin{cases} \vec{B}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{E}^2 & \mu=\nu=0 \\ \frac{1}{c^2}\vec{E}^2 - \vec{B}^2 & \mu=\nu=1,2,3 \end{cases}$$

damit ist

$$\mu_0 T_{em}^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2\right) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \frac{1}{c}(\vec{E}\times\vec{B})_x & \frac{1}{c^2}\left(-\frac{1}{2}E_x^2+\frac{1}{2}E_y^2+\frac{1}{2}E_z^2\right) - \frac{1}{2}B_x^2+\frac{1}{2}B_y^2+\frac{1}{2}B_z^2 & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{c}(\vec{E}\times\vec{B})_y & -\frac{1}{c^2}E_xE_y - B_xB_y & \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}E_x^2-\frac{1}{2}E_y^2+\frac{1}{2}E_z^2\right) + \frac{1}{2}B_x^2-\frac{1}{2}B_y^2+\frac{1}{2}B_z^2 & \cdot \\ \frac{1}{c}(\vec{E}\times\vec{B})_z & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$$

also

Energieaustausch: (Bilanzgleichung)

integral

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho_E + \int_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{S} = -\int_V d^3r\, \vec{j}\,\vec{E}$$

zeitl. Änderung der Feldenergie in V

Energiestrom durch die Oberfläche ∂V

vom Feld an den Teilchen verrichtete Arbeit / Zeit, d.h. Leistungsabgabe räumliche Komponenten des Maxwellschen Tensors:

$$\mu_0 T_M^{ij} = -\frac{1}{c^2} E_i E_j - B_i B_j + \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2 \right)$$

$$= -\mu_0 \sigma_{ij}$$

Maxwellscher <u>Spannungstensor</u> (3-Tensor!)

insgesamt:

es gelten also die Erhaltungssätze (keine Qu.)

bzw. die Bilanzgleichungen

definiere

Erhaltungssätze:

$-\sigma$: Impulsstromdichte!
d.h. $-\sigma_{ji}$ ist die j-te Komp. des Flusses der i-ten Komp. der Feldimpulsdichte

integral:

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3r\, P_i = \overbrace{\int_{\partial V} d\vec{A}\, \underbrace{\sum_j \sigma_{ji}\vec{e}_j}_{\text{Kraft pro Fläche: Strahlungsdruck}}}^{-\text{ Impulsfluss durch } \partial V}$$

zeitliche Änderung der i-ten Feldimpuls-komponente
("Kraft auf das Feld in V")

Bilanzgleichungen

$$0 = \frac{\partial P_i}{\partial t} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji} + \underbrace{\rho E_i + (\vec{J} \times \vec{B})_i}$$

Integral für $V \to \infty$ (Felder verschwinden auf ∂V)