

(*) es gilt

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 = \left(\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \partial_i A_j \vec{e}_k \right)^2$$

$$= \sum_k \sum_{j,j'} \epsilon_{ijk} \epsilon_{i'j'k} (\partial_i A_j) (\partial_{i'} A_{j'})$$

$$= \sum_{i,j,i',j'} \underbrace{\left(\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{i'j'k} \right)}_{\neq 0 \text{ nur für } i=i' \text{ und } j=j' \text{ oder } i=j' \text{ und } j=i'}$$

$\neq 0$ nur für $i=i'$ und $j=j'$
oder $i=j'$ und $j=i'$

$$= \sum_{ij} \sum_{i'j'} (\delta_{ii'} \delta_{jj'} - \delta_{ij'} \delta_{ji'}) (\partial_i A_j) (\partial_{i'} A_{j'})$$

$$= \sum_{ij} \left[(\partial_i A_j) (\partial_i A_j) - (\partial_i A_j) (\partial_j A_i) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i A_j)} = \left(-\frac{1}{2\mu_0} \right) \left[2 \partial_i A_j - 2 \partial_j A_i \right]$$
$$= \frac{1}{\mu_0} (\partial_j A_i - \partial_i A_j)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} A_j)} = \frac{1}{\mu_0} (\partial_j \vec{A} - \vec{\nabla} A_j) \quad \checkmark$$

Feldgleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{\Phi})} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{A})} \\ &= -\rho - \frac{d}{dt} \epsilon_0 \left(\nabla \Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ &= -\rho - \epsilon_0 \Delta \Phi - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{A} \end{aligned}$$

Lorentz - Eichung

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \partial_{\mu} A^{\mu} &= \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} A^{\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = 0 \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \vec{A} &= 0 \end{aligned}$$

dannot folgt:

$$0 = -\rho - \epsilon_0 \Delta \Phi + \epsilon_0 \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

bzw.

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \Phi = \rho / \epsilon_0 \quad \checkmark$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{A}_i)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{A}_0)}$$

$$= j_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{A} - \frac{1}{\mu_0} \nabla A_0 \right) - \frac{d}{dt} \left(\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} A_0 \right)$$

$$= \vec{j}_i - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{\nabla} \vec{A} + \frac{1}{\mu_0} \Delta A_i - \frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2}$$

also

$$0 = \vec{j} - \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{A}) + \Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right)$$

mit der Lorenz - Bedingung: $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{A})$

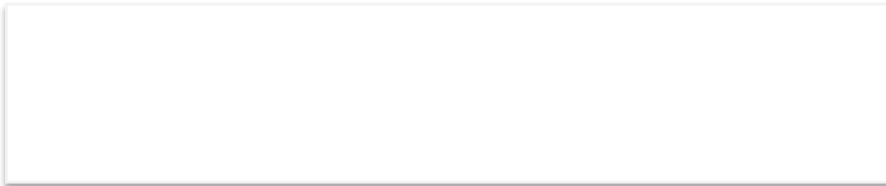
und somit

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad \checkmark$$

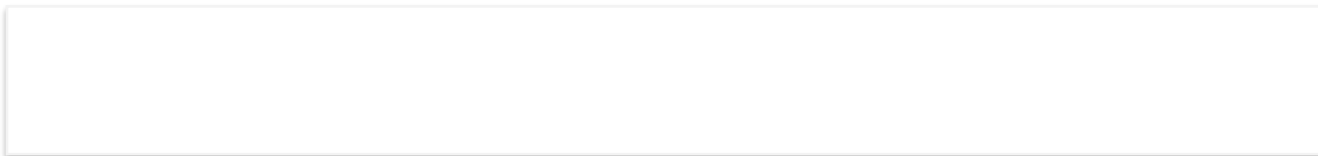
beachte:

$$\int d^3r \mathcal{L}_{\text{EM}} = \int d^3r (-\rho \Phi + \vec{j} \vec{A}) = \mathcal{L}_{\text{EM}}$$

für N Punktteilchen ist



und damit:



→ konsistent mit der Lagrange - Funktion eines Teilchen im elektromagnetischen Feld

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - q \Phi(\vec{r}, t) + q \dot{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Elektrodynamik plus nichtrelativistische
Mechanik von N Punktteilchen =

$$\boxed{\delta S = 0}$$

$$S = S_{\text{Feld}} + S_{\text{sw}} + S_{\text{Teilchen}}$$

mit

$$S_{\text{Feld}} = \int dt \int d^3r \mathcal{L}_{\text{Feld}}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Feld}} = \text{s.o.}$$

$$S_{\text{Teilchen}} = \int dt L_{\text{Teilchen}}$$

$$L_{\text{Teilchen}} = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

Wechselwirkungssystem =

$$S_{\text{sw}} = \int dt L_{\text{sw}} = \int dt \int d^3r \mathcal{L}_{\text{sw}}$$

aus Teilchensicht:

(LI für die N Teilchen im gegebenen Feld)

aus Feldsicht:

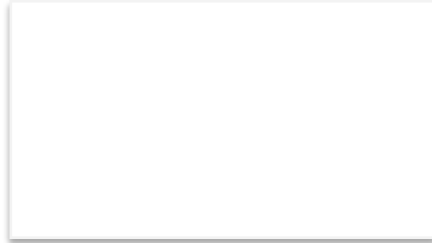
(Feldgleichung für \mathbb{F}, \mathbb{A} bei gegebenen Quellen)

10.4 Energie - Impuls - Tensor

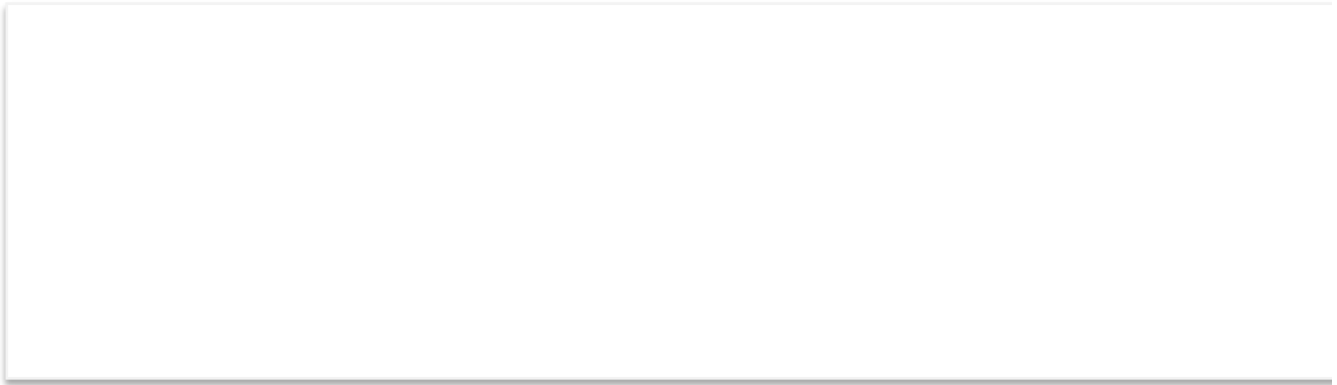
betrachte eine Feldtheorie

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(y_1, \dots, y_f, \partial^\alpha y_1, \dots, \partial^\alpha y_f, x^\mu)$$

mit



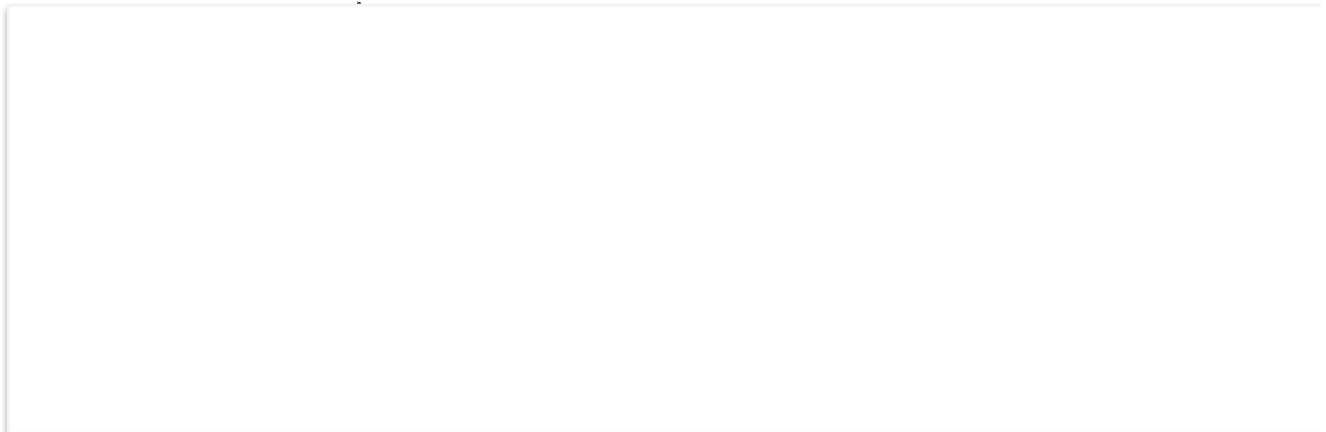
es gilt:



mit den Feldgleichungen

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_n} - \sum_0 \partial^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\alpha y_n)}$$

folgt:



mit $\partial_\mu \mathcal{L} = \sum_\nu g_{\mu\nu} \partial^\nu \mathcal{L}$ folgt:

definiere das Tensorfeld $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(x)$ als:

dann ist

oder mit

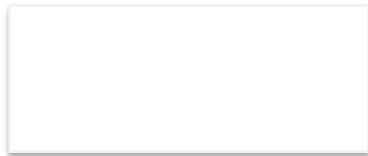
folgen die 4 Erhaltungssätze

beachte: $T^{\mu\nu}$ ist nicht eindeutig!

sei $G^{\mu\nu}$ ein Tensor 3. Stufe mit

dann folgt für

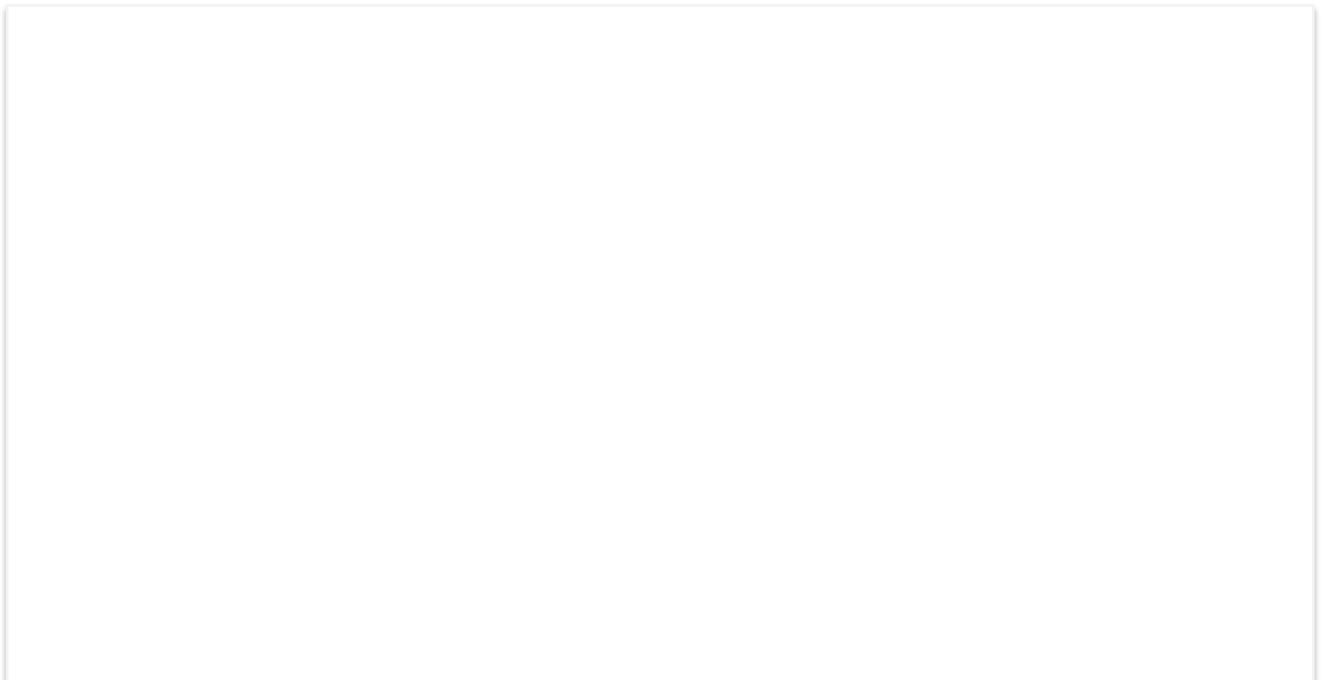
Zur eindeutigen Festlegung des Tensors
fordern wir daher dessen Symmetrie



für das elektromagnetische Feld (ohne Quellen!)
folgt mit

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} \sum_{\mu\nu} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

dass

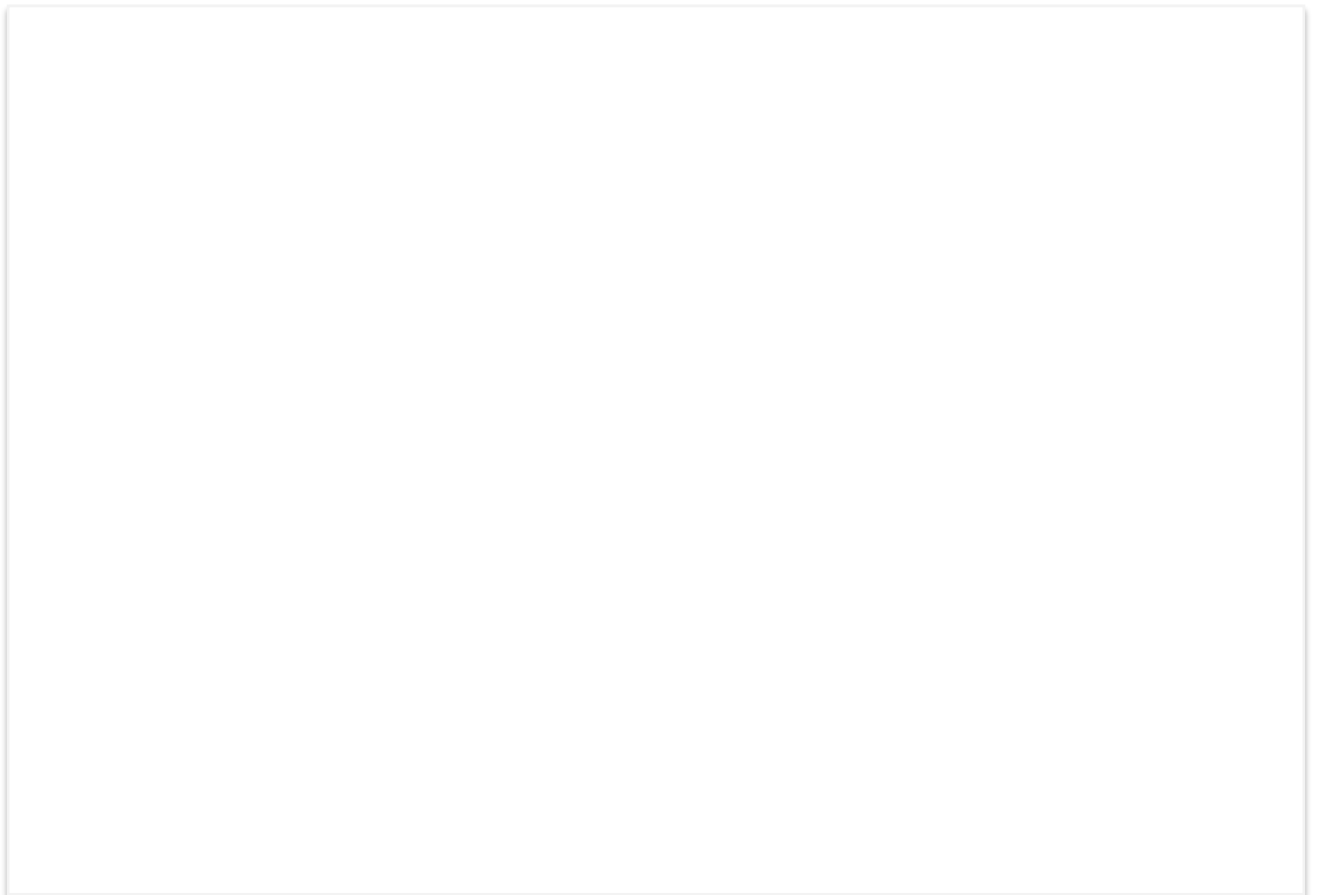


es ist $T^0 \neq T^0$!

wir addieren daher den Term



definiere also



Maxwellsches Tensorfeld

es gilt $\boxed{T_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = T_{\nu\mu}^{\sigma\rho}}$ denn:

weiter ist $T_{\mu\nu}$ spurlos

$\boxed{\sum_{\mu} T_{\mu\nu}^{\mu\lambda} = 0}$ denn:

es gilt (nach wie vor):

$$\boxed{\sum_{\mu} \partial_{\mu} T_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = 0}$$

Energie- und
Impulserhaltung
des elektromagnetischen
Felds in Abwesenheit
von Quellen

Sei jetzt $j^0 \neq 0$; dann gilt

10.5 Energie- und Impulsanstausch

Berechnung der Komponenten des Maxwell'schen Tensors:

$$\sum_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 2 \left(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2} \vec{E}^2 \right) \quad (\text{S.O.})$$

$$\sum_{\rho} F^{\mu\rho} F_{\rho}^{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{E}/c \\ \vec{E}/c & \begin{matrix} 0 & -B_z & B_y \\ B_z & 0 & -B_x \\ -B_y & B_x & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\vec{E}/c \\ -\vec{E}/c & \begin{matrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{E}^2/c^2 & & & \\ \frac{1}{c}(E_y B_z - E_z B_y) & -\frac{E_x^2}{c^2} + B_y^2 + B_z^2 & & \\ \frac{1}{c}(E_z B_x - E_x B_z) & -\frac{1}{c^2} E_x E_y - B_x B_y & -\frac{E_y^2}{c^2} + B_x^2 + B_z^2 & \\ \frac{1}{c}(E_x B_y - E_y B_x) & -\frac{1}{c^2} E_x E_z - B_x B_z & -\frac{1}{c^2} E_y E_z - B_y B_z & -\frac{E_z^2}{c^2} + B_x^2 + B_y^2 \end{pmatrix}$$

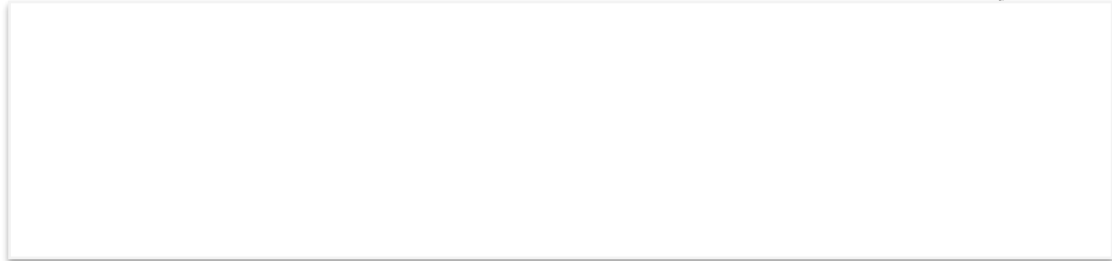
$$\frac{1}{4\mu_0} \sum_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} = \frac{1}{2\mu_0} \begin{cases} B^2 - \frac{1}{c^2} E^2 & \mu=0=0 \\ \frac{1}{c^2} E^2 - B^2 & \mu=0=1,2,3 \end{cases}$$

damit ist

$$\mu_0 T^{\mu\nu} = \begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2} \left(\frac{E^2}{c^2} + B^2 \right) & & & \\ \hline \frac{1}{c} (\vec{E} \times \vec{B})_x & \frac{1}{c^2} \left(-\frac{1}{2} E_x^2 + \frac{1}{2} E_y^2 + \frac{1}{2} E_z^2 \right) & & \\ & -\frac{1}{2} B_x^2 + \frac{1}{2} B_y^2 + \frac{1}{2} B_z^2 & & \\ \frac{1}{c} (\vec{E} \times \vec{B})_y & -\frac{1}{c^2} E_x E_y - B_x B_y & \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} E_x^2 - \frac{1}{2} E_y^2 + \frac{1}{2} E_z^2 \right) & \\ & & + \frac{1}{2} B_x^2 - \frac{1}{2} B_y^2 + \frac{1}{2} B_z^2 & \\ \frac{1}{c} (\vec{E} \times \vec{B})_z & & & \end{array}$$

also

Energieaustausch: (Bilanzgleichung)



Integral

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho_E + \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{S} = - \int_V d^3r \vec{j} \cdot \vec{E}$$

↑
zeitl. Änderung der
Feldenergie in V

↑
Energiestrom
durch die
Oberfläche ∂V

⏟
vom Feld an den
Teilchen verrichtete
Arbeit / Zeit, d.h.
Leistungsabgabe

räumliche Komponenten des Maxwellstensors:

$$\mu_0 T_{ij}^{(3)} = -\frac{1}{c^2} E_i E_j - B_i B_j + \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(\frac{E^2}{c^2} + B^2 \right)$$
$$\Rightarrow \mu_0 \sigma_{ij}$$

Maxwellscher Spannungstensor (3-Tensor!)

ausgesamt:

es gelten also die Erhaltungssätze (keine Qu-)

bzw. die Bilanzgleichungen

definiere

Erhaltungssätze:

- G : Impulsstromdichte!
d.h. $-G_{ji}$ ist die j -te Komp.
des Flusses der i -ten Komp.
der Feldimpulsdichte

Integral:

$$\frac{d}{dt} \int_V dV P_i = \int_{\partial V} dA \underbrace{\sum_j G_{ji} \vec{e}_j}_{\text{Kraft pro Fläche: Strahlungsdruck}}$$

↗

Zeitliche Änderung
der i -ten Feldimpuls-
komponente

(\leftarrow Kraft auf das Feld
in V)

- Impulsfluss durch ∂V

Kraft pro Fläche:
Strahlungsdruck

Bilanzgleichungen

$$0 = \frac{\partial \rho_0}{\partial t} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} j_{j0} + \underbrace{\rho E_c + (\vec{J} \times \vec{B})_i}_{}_i$$



Integral für $V \rightarrow \infty$ (Felder verschwinden auf ∂V)

