

10.2 Zusammenstellung von Vierer-Tensoren

1) Eigenzeit (differenzial)

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt \quad \left(\text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ und } v = \text{Teilchengeschwindigkeit} \right)$$

2) Vierer-Geschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma (c, \vec{v}) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$\sum_{\mu} u_{\mu} u^{\mu} = c^2$$

3) Vierer-Beschleunigung

$$b^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

4) Vierer-Impuls

$$p^\mu = m u^\mu \quad m = \text{Ruhemasse (Skalar)}$$

$$p^\mu = (m\gamma c, m\gamma \vec{v}) = (E/c, \vec{p})$$

$$\vec{p} = m\gamma \vec{v} \quad (!)$$

$$\sum_{\mu} p_{\mu} p^{\mu} = m^2 c^2 \Leftrightarrow E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

5) Minkowski-Kraft

$$K^\mu = m b^\mu = \frac{dp^\mu}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} (E/c, \vec{p}) = (K^0, \vec{K})$$

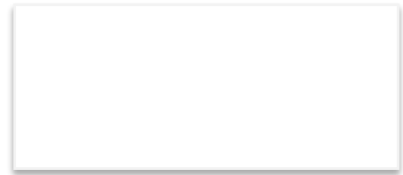
$$K^0 = \gamma \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c} \quad \vec{K} = \gamma \vec{F} \quad \text{mit } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{P})$$

6) Vierer-Stromdichte

$$\begin{aligned} \vec{j}^\mu &= (c\rho, \vec{j}) = (c\rho_0, \gamma\rho_0\vec{v}) \\ &= \rho_0 \gamma (c, \vec{v}) = \rho_0 u^\mu \end{aligned}$$

ρ_0 : Ruheladungsdichte

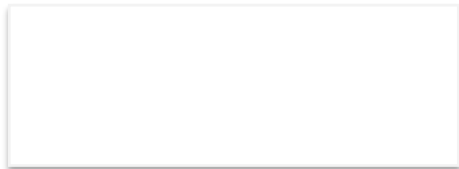
Kontinuitätsgleichung:



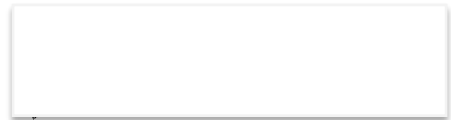
7) Vierer-Potenzial

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c} \Phi, \vec{A} \right)$$

entkoppelte
Potentialgleichungen:



Lorenz-Eichung



8) Lorentz-Kraft

$$K^\mu = q \cdot \sum_j F^{\mu\nu} a_{j\nu}$$

9) Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{E}/c \\ \vec{E}/c & \begin{matrix} 0 & -B_z & B_y \\ 0 & -B_x & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = -F^{\mu\nu}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{E}/c \\ -\vec{E}/c & \begin{matrix} 0 & -B_z & B_y \\ 0 & -B_x & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = -F_{\mu\nu}$$

inhomogene Maxwell-Gleichungen:

10) dualer Feldstärketensor

es gilt

und somit

definiere: dualer Feldstärketensor

denn gilt

$$\sum_0 \partial^0 \tilde{F}_{\rho 0} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_0 \partial_0 \tilde{F}^{\rho 0} = \rho$$

bzw. (wegen Antisymmetrie)

$$\sum_{\mu} \partial_{\mu} \tilde{F}^{\mu 0} = 0, \quad \text{homogene Maxwell-Gleichungen}$$

es ist

$$(\tilde{F}^{\mu 0}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & & -\vec{B} \\ \hline \vec{B} & 0 & E_{12} & -E_{13} \\ & \cdot & 0 & E_{23} \\ & \cdot & \cdot & 0 \end{array} \right)$$

11) Eichfreiheit

$$\boxed{\phantom{A^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu} \chi}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} \\ &= \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} - \partial^{\mu} \partial^{\nu} \chi + \partial^{\nu} \partial^{\mu} \chi \\ &= F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

F invariant unter Eichtransformationen des Potentials

Sei A^{μ} gegeben, wähle χ als Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\square \chi = \sum_{\mu} \partial_{\mu} A^{\mu}$
dann ist $\sum_{\mu} (\partial_{\mu} \partial^{\mu} \chi - \partial_{\mu} A^{\mu}) = 0$, also mit
 $A^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu} \chi = \sum_{\mu} \partial_{\mu} A^{\mu} = 0$ (Lorenz-Gleichung)

12) Verjüngung des Feldstärketensors

$$(\tilde{F}_{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -\vec{E}/c & & \\ \hline \vec{E}/c & 0 & -B_z & B_y \\ & & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{array} \right) \quad (\tilde{F}_{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \vec{E}/c & & \\ \hline -\vec{E}/c & 0 & -B_z & B_y \\ & & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{array} \right)$$

$$(\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -\vec{B} & & \\ \hline \vec{B} & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ & & 0 & E_x/c \\ & & & 0 \end{array} \right) \quad (\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \vec{B} & & \\ \hline -\vec{B} & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ & & 0 & E_x/c \\ & & & 0 \end{array} \right)$$

10.3 Lagrange-Dichte des elektromagnetischen

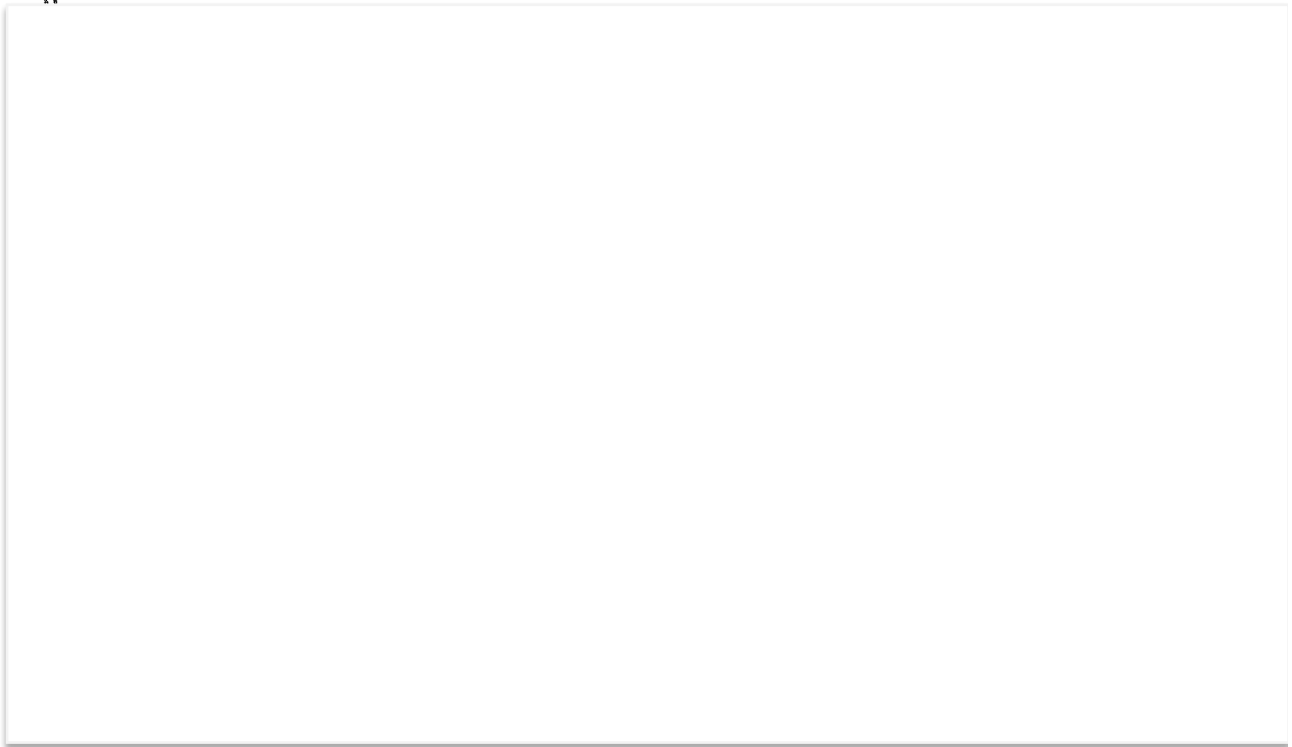
Ableitung der Maxwell-Gleichungen

Felds

aus $\delta S = 0$?

$$S = \int dt \int d^3r \mathcal{L} = \frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{L}$$

es gilt



$$\boxed{d^4x = d^4x^L} \quad \text{Skalar}$$

beachte: falls \mathcal{L} ein Skalar ist, ist

$\delta S = 0$ kovariant unter der Bedingung

dass $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\text{Vierer-Tensoren})$

z.B. $\mathcal{L} = \mathcal{L}(F^{\mu\nu}, \dots)$ oder $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A^\mu, \dots)$

- \mathcal{L} skalar $\rightsquigarrow \mathcal{L} \sim \sum_{\mu\nu} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \sum_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$

- für $\mathcal{L} = \mathcal{L}(F^{\mu\nu})$ treten keine Ableitungen auf!?

- besser: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A^\mu, \partial^\mu A^\nu, \dots)$

- Feldgleichungen für $A^\mu \Leftrightarrow$ inhomogene Maxwell-Gleichungen

homogene Maxwell-Gleichungen $\sum_{\mu} \partial_{\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$

sind mit $\tilde{F}^{\mu\nu} = \sum_{\rho\sigma} \epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} F_{\rho\sigma}$ und mit

$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ trivial erfüllt

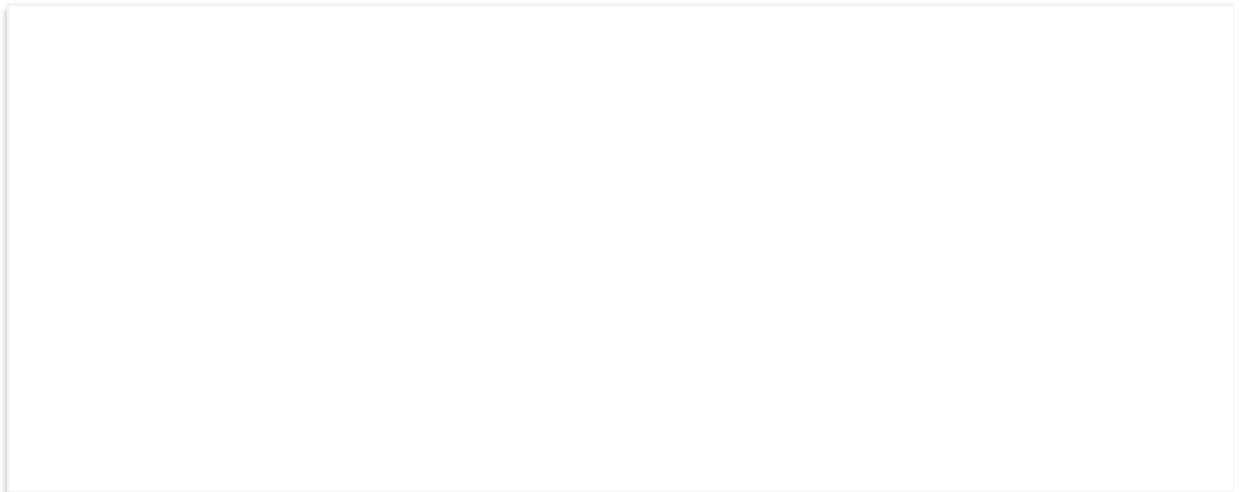
- $\mathcal{L}(A^\mu, \dots) = \text{const} \cdot \sum_{\mu\nu} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$

in Abwesenheit von Quellen j^μ

- Kopplung zwischen Quellen j^μ und Feld A^μ :

einfachster Skalar: $\text{const} \sum_{\mu} j^\mu A^\mu$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Feld}} + \mathcal{L}_{\text{uv}}$$



$$0 = \delta S = \int d^4x \delta \mathcal{L}$$

beachte: \mathcal{L} Skalar \rightarrow Feldgleichungen kovariant

es ist

Zusammen oft also:

$$0 = -j_0 - \sum_{\mu} \partial^{\mu} \left(-\frac{1}{\mu_0} \right) F_{\mu 0}$$

bzw.:

$$\sum_{\mu} \partial_{\mu} F^{\mu 0} = \mu_0 j^0 \quad (\checkmark)$$

als Gleichung für die Potentiale:

$$\sum_{\mu} \partial_{\mu} (\partial^{\mu} A^0 - \partial^0 A^{\mu}) = \mu_0 j^0$$

also:

$$\square A^{\mu} = \mu_0 j^{\mu}$$

(inhomogene Wellengleichung)

Nichtrelativistische Rechnung:

es ist

$$\mathcal{L}_{\text{Feld}} = -\frac{1}{4\mu_0} \sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

siehe
oben \rightarrow

$$= -\frac{1}{4\mu_0} 2 \left(\mathbb{B}^2 - \frac{1}{c^2} \mathbb{E}^2 \right)$$

mit:

weiter gilt

$$\mathcal{L}_{\text{M}} = -\sum_{\mu} j_{\mu} A^{\mu}$$

$$A^{\mu} = \left(\frac{1}{c} \Phi, \vec{A} \right)$$

$$j^{\mu} = (c\rho, \vec{J})$$

$$j_{\mu} = (c\rho, -\vec{J})$$

also ist $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Feld}} + \mathcal{L}_{\text{M}}$:

Ableitung der Potenzialgleichungen:

in der N -Teilchen-Punktmechanik war $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0$ ausgeschlossen, denn dies impliziert, dass q_n keine notwendige Koordinate zur Festlegung der Teilchenpositionen (kompatibel mit dem ZB) ist

hier: $\pi_{\underline{f}} = 0$ drückt die Eichfreiheit in der Wahl der Potentiale aus, die erst durch eine Eichbedingung (z.B. Lorenz-Eichung) eindeutig bestimmt werden können

→ Probleme (aber nur) in der QFT