10.2 Zusammenstellung von Vierer-Tensoren

1) Eigenzeit (differenzial)

$$d\tau = \frac{1}{\gamma}\,dt \qquad \left(\text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ und}\right.$$

v: Teilchengeschwindigkeit)

2) Vierer-Geschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma\,(c, \vec{u}) \qquad \vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$\sum_\mu u_\mu u^\mu = c^2$$

3) Vierer-Beschleunigung

$$b^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$$

4) Vierer-Impuls

$$p^\mu = m u^\mu \qquad m\text{: Ruhemasse (Skalar)}$$

$$p^\mu = (m\gamma c, m\gamma\vec{u}) = (E/c, \vec{p})$$

$$\vec{p} = m\gamma\vec{u} \quad (!)$$

$$\sum_\mu p_\mu p^\mu = m^2c^2 \iff E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$$

5) Minkowski-Kraft

$$K^\mu = m\, b^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}\left(E/c, \vec{p}\right) = \left(K^0, \vec{K}\right)$$

$$K^0 = \gamma \frac{\vec{F}\vec{v}}{c} \qquad \vec{K} = \gamma \vec{F} \qquad \text{mit } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (?)$$

6) Vierer-Stromdichte

$$j^\mu = \left(c\rho, \vec{j}\right) = \left(c\gamma\rho_0, \gamma\rho_0\vec{v}\right)$$

$$= \rho_0 \gamma \left(c, \vec{v}\right) = \rho_0 u^\mu$$

ρ_0 : Ruheladungsdichte

Kontinuitätsgleichung :

7) Vierer-Potential

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c}\Phi, \vec{A}\right)$$

Lorentz-Eichung

entkoppelte Potentialgleichungen:

8) Lorentz-Kraft

$$K^\mu = q \cdot \sum_\nu F^{\mu\nu} u_\nu$$

9) Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & -\vec{E}/c & \\ \hline & 0 & -B_z & B_y \\ \vec{E}/c & & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{array}\right) = -F^{\nu\mu}$$

$$F_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & \vec{E}/c & \\ \hline & 0 & -B_z & B_y \\ -\vec{E}/c & & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{array}\right) = -F_{\nu\mu}$$

inhomogene Maxwell-Gleichungen:

10) dualer Feldstärketensor

es gilt

und somit

definiere: dualer Feldstärketensor

denn gilt

$$\sum_\sigma \partial^\sigma \tilde{F}_{\rho\sigma} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_\sigma \partial_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma} = 0$$

bzw. (wegen Antisymmetrie)

$$\sum_\mu \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$, homogene Maxwell-Gleichungen

es ist

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & -\vec{B}^T & \\ \hline & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ \vec{B} & \cdot & 0 & E_x/c \\ & \cdot & \cdot & 0 \end{array}\right)$$

11) Eichfreiheit

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu} &= \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu \chi + \partial^\nu \partial^\mu \chi \\ &= F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

F invariant unter Eichtransformationen des Potentials

sei A^μ gegeben, wähle χ als Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\Box \chi = \sum_\mu \partial_\mu A^\mu$
dann ist $\sum_\mu (\partial_\mu \partial^\mu \chi - \partial_\mu A^\mu) = 0$, also mit
$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$: $\sum_\mu \partial_\mu A'^\mu = 0$ (Lorenz-Eichung)

12) Verjüngung des Feldstärketensors

$$
(F^{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & -\vec{E}/c & \\ \hline & 0 & -B_z & B_y \\ \vec{E}/c & & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{array}\right)
\qquad
(F_{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & \vec{E}/c & \\ \hline & 0 & -B_z & B_y \\ -\vec{E}/c & & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{array}\right)
$$

$$
(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & -\vec{B} & \\ \hline & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ \vec{B} & & 0 & E_x/c \\ & & & 0 \end{array}\right)
\qquad
(\tilde{F}_{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & \vec{B} & \\ \hline & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ -\vec{B} & & 0 & E_x/c \\ & & & 0 \end{array}\right)
$$

10.3 Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Felds

Ableitung der Maxwell-Gleichungen aus $\delta S = 0$?

$$S = \int dt \int d^3r \; \mathcal{L} = \frac{1}{c} \int d^4x \; \mathcal{L}$$

es gilt

$$\boxed{d^4x = d^4x'} \quad \text{Skalar}$$

beachte: falls $\mathcal{L}$ ein Skalar ist, ist $\delta S = 0$ kovariant unter der Bedingung dass $\mathcal{L} = \mathcal{L}$ (Vierer-Tensoren)

z.B. $\mathcal{L} = \mathcal{L}(F^{\mu\nu}, \dots)$ oder $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A^{\mu}, \dots)$

- $\mathcal{L}$ skalar $\rightsquigarrow$ $\mathcal{L} \sim \sum_{\mu\nu} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, $\sum_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$

- für $\mathcal{L} = \mathcal{L}(F^{\mu\nu})$ treten keine Ableitungen auf !?

- besser: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A^\mu, \partial^\mu A^\nu, \dots)$

- Feldgleichungen für A^μ $\Leftrightarrow$ inhomogene Maxwell-Gleichungen

  homogene Maxwell-Gleichungen $\sum_\mu \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$
  sind mit $\tilde{F}^{\mu\nu} = \sum_{\rho\sigma} \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu} F_{\mu\nu}$ und mit
  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ trivial erfüllt

- $\mathcal{L}(A^\mu, \dots) = \text{const} \cdot \sum_{\mu\nu} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$
  in Abwesenheit von Quellen j^μ

- Kopplung zwischen Quellen j^μ und Feld A^μ:
  einfachster Skalar : $\text{const} \sum_\mu j_\mu A^\mu$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Feld} + \mathcal{L}_{ww}$$

$$0 = \delta S = \int d^4x \, \delta \mathcal{L}$$

beachte: $\mathcal{L}$ Skalar $\rightarrow$ Feldgleichungen kovariant

---

es ist

zusammen gilt also:

$$0 = -j_0 - \sum_\mu \partial^\mu \left(-\frac{1}{\mu_0}\right) F_{\mu 0}$$

bzw.:

$$\sum_\mu \partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 j^0 \qquad (\checkmark)$$

als Gleichung für die Potenziale:

$$\sum_\mu \partial_\mu \left(\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu\right) = \mu_0 j^0$$

also:

$$\Box A^\mu = \mu_0 j^\mu$$

(inhomogene Wellengleichung)

Nichtrelativistische Rechnung:

es gilt

$$\mathcal{L}_{Feld} = -\frac{1}{4\mu_0} \sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

siehe oben $\overset{\curvearrowright}{=} -\frac{1}{4\mu_0} 2\left(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{E}^2\right)$

mit:

weiter gilt

$$\mathcal{L}_{WW} = -\sum_{\mu} j_\mu A^\mu$$

$A^\mu = \left(\frac{1}{c}\Phi, \vec{A}\right)$

$j^\mu = \left(c\rho, \vec{j}\right)$

$j_\mu = \left(c\rho, -\vec{j}\right)$

also gilt $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Feld} + \mathcal{L}_{WW}$:

Ableitung der Potenzialgleichungen:

in der N-Teilchen-Punktmechanik war $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0$ ausgeschlossen, denn dies impliziert, dass q_n keine notwendige Koordinate zur Festlegung der Teilchenpositionen (kompatibel mit den ZB) ist

hier: $\pi_\Phi = 0$ drückt die Eichfreiheit in der Wahl der Potenziale aus, die erst durch eine Eichbedingung (z.B. Lorenz-Eichung) eindeutig bestimmt werden können

→ Probleme (aber nur) in der QFT