Gesamtenergie

$$E = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, \mathcal{H} = \underbrace{\int d^3r \left(\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}\psi^+ \vec{\nabla}\psi\right.}_{\displaystyle \underbrace{\int d^3r \left(\vec{\nabla}(\psi^+\vec{\nabla}\psi)\right.}_{\text{Gauß}} - \psi^+ \vec{\nabla}^2\psi \Big)} \left. + V\psi^+\psi \right)$$

$$\oint_{\partial V} d\vec{A}\; \psi^+ \vec{\nabla}\psi = 0$$

falls $\psi(\vec{r},t) \to 0$ für "$\vec{r} \to \infty$"

also:

$$E = \int d^3r\, \psi^+(\vec{r},t) \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) \right)}_{\substack{\text{QM: Hamilton-Operator} \\ \text{(in Ortsdarstellung)}}} \psi(\vec{r},t)$$

$\mathcal{L}$ ist offensichtlich invariant unter

$\mathcal{L}$ invariant, $\Lambda \in \mathbb{R}$ kontinuierlicher Parameter

$\rightarrow$ Erhaltungsgröße! welche?

Noether: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$ mit

$\rho(\vec{r},t) =$

$\vec{j}(\vec{r},t) =$

es ist:

$\rho(\vec{r},t)$

also $\int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, |\psi|^2 = \text{const}$

und $\rho(\vec{r},t) = |\psi(\vec{r},t)|^2 \geq 0$

$\Big\}$ geeignet für Wahrscheinlichkeits-interpretation!

ρ = WK-Dichte (nach Normierung)

Invarianz unter Eichtransformation

$\downarrow$

Wahrsch.-Interpretation möglich

also: QM muss mit komplexem Feld $\psi(\vec{r},t) \in \mathbb{C}$ formuliert werden!

Wahrscheinlichkeits<u>strom</u>dichte:

$$
\begin{aligned}
\vec{j}(\vec{r},t) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\psi^* \left(-\frac{i}{\hbar}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}\Lambda}\,\psi' \\
&\quad -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\psi \left(+\frac{i}{\hbar}\right) e^{\frac{i}{\hbar}\Lambda}\,\psi'^* \Big|_{\Lambda=0} \\
&= \frac{\hbar}{m}\,\frac{1}{2i}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right) \\
&= \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi\right)
\end{aligned}
$$

10 Relativistische Feldtheorie

10.1 Vierer-Tensoren

Postulat der speziellen Relativitätstheorie:

Physikalische Gesetze sind forminvariant unter Transformationen der

Poincaré-Gruppe:

1 Zeittranslationen
3 räumliche Translationen
3 räumliche Drehungen
3 spezielle Lorentz-Trsf.

wie bei der Galilei-Gruppe (ohne spez. Gal.-Trsf.)

Lorentz-Gruppe (lässt 0 invariant)

---

10 Parameter

spezielle Lorentz-Transformation:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

$$\beta = v/c \qquad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$x'^0 = \gamma\,(x^0 - \beta x^1)$$

$$x'^1 = \gamma\,(x^1 - \beta x^0)$$

oder:

$$\boxed{x'^{\mu} = \sum_{\nu} L^{\mu}_{\ \nu} \, x^{\nu}} \qquad \mu = 0,1,2,3$$

mit der Lorentz-Transformationsmatrix

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

allgemeine Relativgeschwindigkeit $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$

$\underline{L}^{T} = \underline{L}$

Def: <u>metrischer Tensor</u>

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

es gilt (einfaches Nachrechnen)

Def: <u>Minkowski-Skalarprodukt</u>

$$x \circ y = \sum_{\mu\nu} x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu$$

- bilinear
- symmetrisch
- indefinit $\Longrightarrow$ $x \circ x > 0$ „zeitartig"
  $x \circ x < 0$ „raumartig"

es gilt: $\boxed{x' \circ y' = x \circ y}$

Def: Für ein Ereignis x heißen x^μ die <u>kontravarianten Komponenten</u> von x

Def: (verallgemeinertes Transponieren)

x_μ heißen die <u>kovarianten Komponenten</u> von x

es gilt

$$x \circ y = \sum_{\mu\nu} x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = \sum_\mu x^\mu y_\mu$$

$$= \sum_{\mu\nu} y^\nu g_{\nu\mu} x^\mu = \sum_\mu x_\mu y^\mu$$

g symmetrisch

<u>Def</u>: $\boxed{g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}}$

es gilt:

Def: 4 phys. Größen $A^0, \vec{A}$, d.h. A^μ ($\mu = 0,1,2,3$) bilden die kontravarianten Komponenten eines <u>Vierer-Vektors</u> (kurz: "<u>kontravarianter Vierer-Vektor</u>"), falls

$$\boxed{A'^\mu = \sum_\nu L^\mu_{\ \nu} A^\nu}$$

bei Lorentz-Transformationen L

A_μ mit Transformationsverhalten

$(\bar{L} = L^{-1})$

heißt <u>kovarianter Vierer-Vektor</u>

es gilt:

$$A^\mu = \sum_\nu g^{\mu\nu} A_\nu \quad , \quad A_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} A^\nu$$

es gilt:

$$A^\mu = (A^0, \vec{A}) \Rightarrow A_\mu = (A_0, -\vec{A})$$

$$(A_0 = A^0)$$

<u>Def</u>: Eine unter Lorentz-Transformationen invariante Größe heißt <u>Vierer-Skalar</u>

$$\boxed{A' = A}$$

Bsp.: $\sum_\mu A_\mu B^\mu = A \circ B$

---

sei $f(x^0, .., x^3)$ eine skalare Funktion, $f' = f$, dann ist df ebenfalls ein Skalar (Vierer-Skalar) und es gilt:

$$df = \sum_\mu \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^\mu}}_{\text{kovarianter Vierer-Vektor}} \cdot \underbrace{dx^\mu}_{\text{kontravarianter Vierer-Vektor}} \quad \text{Skalar}$$

kovariante Form physikalischer Gesetze:

$$A = B\,, \quad A^\mu = B^\mu\,, \quad A_\mu = B_\mu$$

(Gleichheit zwischen Vierer-Tensoren gleicher Stufe)

Tensor 2. Stufe:

kontravariant

$$A^{\mu\nu}$$

kovariant

$$A_{\mu\nu}$$

gemischt

$$A^\mu{}_\nu$$

$$A_\mu{}^\nu$$

Transformationsverhalten kompatibel mit
"Rauf- und Runterziehen" der Indizes:

Tensorprodukt

A^μ, B^μ, C_μ Vektoren $\Rightarrow$ $A^\mu B^\nu$, $A^\mu C_\nu$ Tensoren

Verjüngung

$A^{\mu\nu}$ Tensor $\Rightarrow$ $\sum_\mu A^\mu{}_\mu$ Skalar

$A^{\mu\nu\rho}$ Tensor 3. Stufe, $B^{\mu\nu}$ Tensor 2. Stufe

$\Rightarrow \sum_{\nu\rho} A^{\mu\nu\rho} B_{\nu\rho}$ kontravarianter Vektor

$A^{\mu\nu}, B^{\mu\nu} \Rightarrow \sum_{\mu\nu} A^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$ Skalar

$A^{\mu\nu}, B^\mu \Rightarrow \sum_{\nu} A^{\mu\nu} B_\nu$ Vektor (kontravar.)

$\sum_{\nu} A_{\mu\nu} B^\nu$ Vektor (kov.)

Tensor k-ter Stufe

$A^{\mu_1 \cdots \mu_k}$, $A^{\mu_1\mu_2}{}_{\mu_3}{}^{\mu_4}{}_{\cdots \mu_k}$

symmetrischer Tensor 2. Stufe:

$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$

$A^\mu{}_\nu = A_\nu{}^\mu =: A^\mu_\nu$ (für sym. Tensoren)

$A^\mu{}_\mu = A_\mu{}^\mu$ (gilt immer)

$\delta^\mu_\nu := \sum_\rho g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \begin{cases} 1 & \mu=\nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\delta^\mu_\nu = g^\mu{}_\nu = g_\nu{}^\mu$

sei

$$(A^{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|c} A^{00} & (A^{0j}) \\ \hline (A^{i0}) & (A^{ij}) \end{array}\right) \qquad i,j = 1,2,3$$

dann ist $A_\mu{}^\nu = \sum_\rho g_{\mu\rho} A^{\rho\nu}$, also:

$$(A_\mu{}^\nu) = \left(\begin{array}{c|c} A^{00} & (A^{0j}) \\ \hline -(A^{i0}) & -(A^{ij}) \end{array}\right)$$

und $A^\mu{}_\nu = \sum_\rho A^{\mu\rho} g_{\rho\nu}$, also:

$$(A^\mu{}_\nu) = \left(\begin{array}{c|c} A^{00} & -(A^{0j}) \\ \hline (A^{i0}) & -(A^{ij}) \end{array}\right)$$

und

$$(A_{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|c} A^{00} & -(A^{0j}) \\ \hline -(A^{i0}) & (A^{ij}) \end{array}\right)$$

---

total antisymmetrischer Tensor 4. Stufe

δ^μ_ν, $g^{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ haben in allen IS die gleichen Werte!