

Gesamtenergie

$$E = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi^\dagger \nabla\psi + V\psi^\dagger\psi \right)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \left(\nabla(\psi^\dagger \nabla\psi) - \psi^\dagger \nabla^2\psi \right)$$

$$\oint_{\partial V} d\vec{A} \psi^\dagger \nabla\psi = 0$$

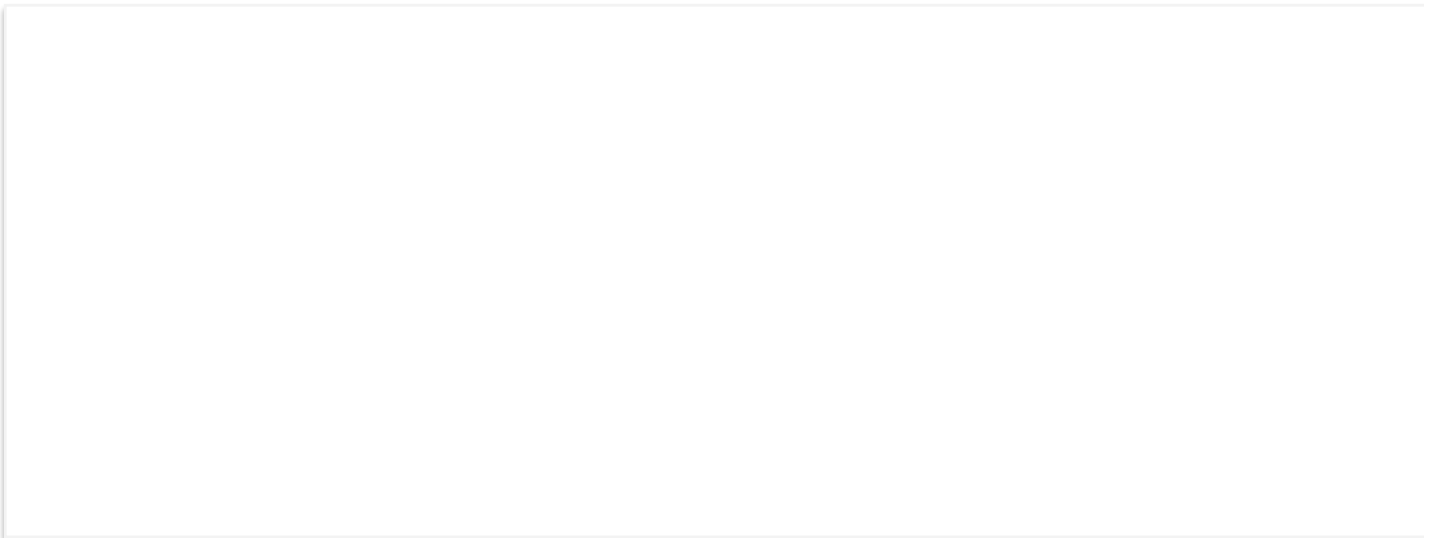
falls $\psi(\vec{r}, t) \rightarrow 0$ für " $\vec{r} \rightarrow \infty$ "

also:

$$E = \int d^3r \psi^\dagger(\vec{r}, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}, t)$$

QM: Hamilton-Operator
(in Ortsdarstellung)

\mathcal{L} ist offensichtlich invariant unter



\mathcal{L} invariant, $\Lambda \in \mathbb{R}$ kontinuierlicher Parameter

→ Erhaltungsgröße! welche?

Noether: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0$ mit

$\rho(\vec{r}, t) =$

$\vec{J}(\vec{r}, t) =$

es ist:

$\rho(\vec{r}, t)$

also $\int_{\mathbb{R}^3} d^3r |\psi|^2 = \text{const}$

und $\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 \geq 0$

} geeignet für
Wahrscheinlichkeits-
interpretation!

$\rho = \text{WK-Dichte}$
(nach Normierung)

Invarianz unter Eichtransformation

↓

Wahrsch.-Interpretation möglich

also: QM unss mit komplexem Feld $\psi(\vec{r}, t) \in \mathbb{C}$
formuliert werden!

Wahrscheinlichkeitsstromdichte:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \left(-\frac{i}{\hbar}\right) e^{-\frac{i}{\hbar} \lambda} \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi \left(+\frac{i}{\hbar}\right) e^{\frac{i}{\hbar} \lambda} \psi^* \Big|_{\lambda=0}$$

$$= \frac{\hbar}{m} \frac{1}{2i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

$$= \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} (\psi^* \nabla \psi)$$

10 Relativistische Feldtheorie

10.1 Vierer-Tensoren

Postulat der speziellen Relativitätstheorie:

Physikalische Gesetze sind forminvariant unter Transformationen der

Poincaré-Gruppe:

1 Zeittranslationen

3 räumliche Translationen

3 räumliche Drehungen

3 spezielle Lorentz-Transf.

} wie bei der
Galilei-Gruppe
(ohne spez. Gal.-Transf.)

} Lorentz-Gruppe
(lässt \emptyset invariant)

10 Parameter

spezielle Lorentz-Transformation:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

$$\beta = v/c \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$x'^0 = \gamma (x^0 - \beta x^1)$$

$$x'^1 = \gamma (x^1 - \beta x^0)$$

oder:

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu} L^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3$$

mit der Lorentz-Transformationsmatrix

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

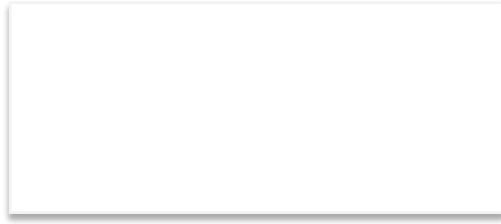
allgemeine Relativgeschwindigkeit $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$

$$\underline{L}^T = \underline{L}$$

Def: metrischer Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

es gilt (einfaches Nachrechnen)



Def: Minkowski - Skalarprodukt

$$x \circ y = \sum_{\mu, \nu} x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu$$

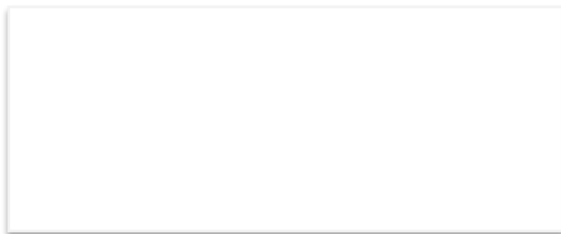
- bilinear
- symmetrisch
- indefinit \rightarrow $x \circ x > 0$ "zeitartig"
 $x \circ x < 0$ "raumartig"

es gilt:

$$x' \circ y' = x \circ y$$

Def: Für ein Ereignis x heißen x^μ die kontravarianten Komponenten von x

Def:



(verallgemeinertes
Transponieren)

x_μ heißen die kovarianten Komponenten von x

es gilt

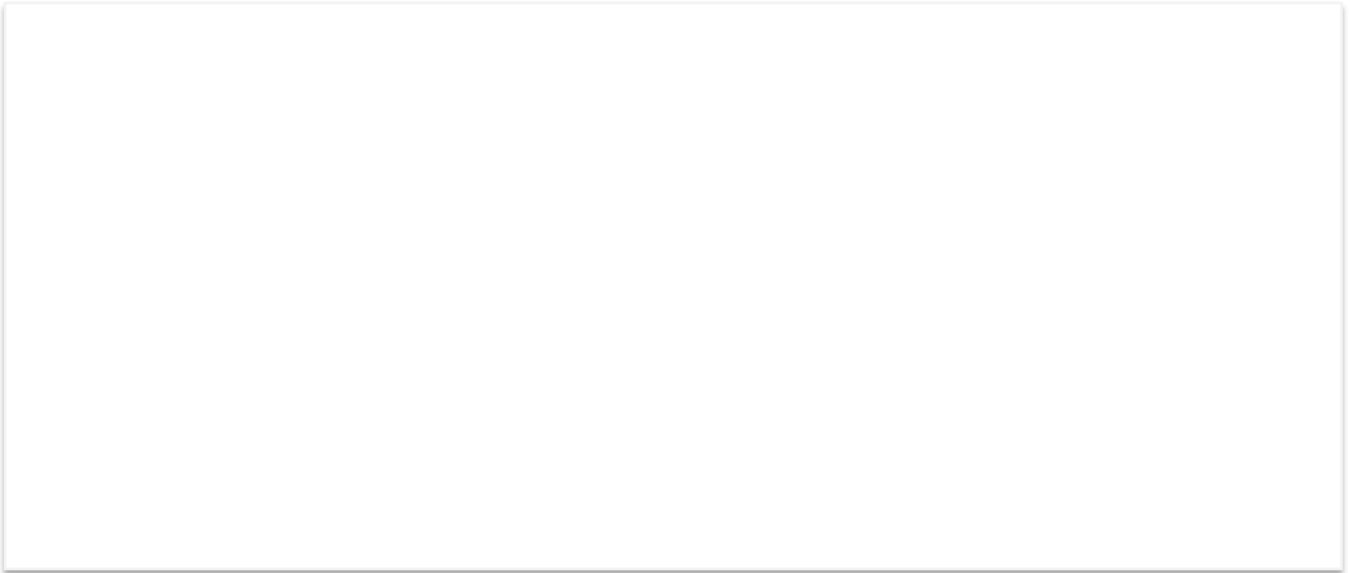
$$x \circ y = \sum_{\mu=0} x^{\mu} g_{\mu\nu} y^{\nu} = \sum_{\mu} x^{\mu} y_{\mu}$$

$$\rightarrow = \sum_{\mu=0} y^{\nu} g_{\nu\mu} x^{\mu} = \sum_{\mu} x_{\mu} y^{\mu}$$

g symmetrisch

Def: $g^{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$

es gilt:



Def: 4 phys. Größen A^0, \vec{A} , d.h. A^μ ($\mu=0,1,2,3$)
bilden die kontravarianten Komponenten
eines Vierer-Vektors

(kurz: "kontravarianter Vierer-Vektor"),
falls

$$A'^\mu = \sum_{\nu} L^{\mu}_{\nu} A^{\nu}$$

bei Lorentz-Transformationen L

A_{μ} mit Transformationsverhalten

$$A'_{\mu} = \sum_{\nu} \bar{L}^{\nu}_{\mu} A_{\nu}$$

$$(\bar{L} = L^{-1})$$

heißt kovarianter Vierer-Vektor

es gilt:

$$A^\mu = \sum_{\nu} g^{\mu\nu} A_{\nu}, \quad A_{\mu} = \sum_{\nu} g_{\mu\nu} A^{\nu}$$

es gilt:

$$A^\mu = (A^0, \vec{A}) \Rightarrow A_\mu = (A_0, -\vec{A})$$
$$(A_0 = A^0)$$

Def: Eine unter Lorentz-Transformationen
invariante Größe heißt Vierer-Skalar

$$A' = A$$

Bsp.: $\sum_{\mu} A_{\mu} \mathcal{B}^{\mu} = A \cdot \mathcal{B}$

sei $f(x^0, \dots, x^3)$ eine skalare Funktion, $f' = f$,
dann ist df ebenfalls ein Skalar (Vierer-Skalar)
und es gilt:

$$df = \sum_{\mu} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{kovarianter Vierer-Vektor}}} \underbrace{dx^{\mu}}_{\substack{\leftarrow \\ \text{kontravarianter Vierer-Vektor}}} \quad \text{Skalar}$$

kovariante Form physikalischer Gesetze:

$$A = B, \quad A^k = B^k, \quad A_{\mu} = B_{\mu}$$

(Gleichheit zwischen Vektor-Tensoren gleicher Stufe)

Tensor 2. Stufe:

Kontravariant

$$A^{kl}$$

Kovariant

$$A_{\mu\nu}$$

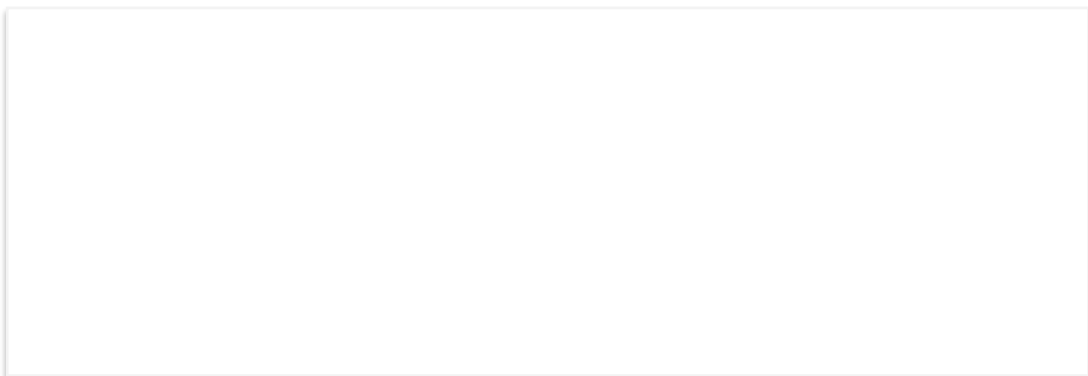
gemischt

$$A^k_{l}$$

$$A_{\mu}^{\nu}$$

Transformationsverhalten kompatibel mit

„Rauf- und Runterziehen“ der Indizes:



Tensorprodukt

A^μ, B^μ, C_μ Vektoren $\Rightarrow A^\mu B^\nu, A^\mu C_\nu$ Tensoren

Verjüngung

$A^{\mu\nu}$ Tensor $\Rightarrow \sum_\mu A^\mu_\mu$ Skalar

$A^{\mu\nu\rho}$ Tensor 3. Stufe, $B^{\mu\nu}$ Tensor 2. Stufe

$\Rightarrow \sum_{\rho\sigma} A^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\rho\sigma}$ kontravarianter Vektor

$A^{\mu\nu}, B^{\mu\nu} \Rightarrow \sum_{\mu\nu} A^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$ Skalar

$A^{\mu\nu}, B^\lambda \Rightarrow \sum_{\mu\nu} A^{\mu\nu} B_\nu$ Vektor (kontrav.)

$\sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu} B^\nu$ Vektor (kov.)

Tensor k-ter Stufe

$A^{\mu_1 \dots \mu_k}, A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$

Symmetrischer Tensor 2. Stufe:

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$$

$$A^\mu_\nu = A_\nu^\mu =: A^\mu_\nu \quad (\text{für sym. Tensoren})$$

$$A^\mu_\mu = A_\mu^\mu \quad (\text{gilt immer})$$

$$\delta^\mu_\nu := \sum_\rho g^{\rho\mu} g_{\rho\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \delta^\mu_\nu = g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = g_{\nu\sigma} g^{\sigma\mu}$$

sei

$$(A^{p0}) = \left(\begin{array}{c|c} A^{00} & (A^{0j}) \\ \hline (A^{i0}) & (A^{ij}) \end{array} \right)$$

$i, j = 1, 2, 3$

dann ist $A_p^0 = \sum_p g_{pp} A^{p0}$, also:

$$(A_p^0) = \left(\begin{array}{c|c} A^{00} & (A^{0j}) \\ \hline -(A^{i0}) & -(A^{ij}) \end{array} \right)$$

und $A^{p0} = \sum_p A^{pp} g_{p0}$, also:

$$(A^{p0}) = \left(\begin{array}{c|c} A^{00} & -(A^{0j}) \\ \hline (A^{i0}) & -(A^{ij}) \end{array} \right)$$

und

$$(A_{p0}) = \left(\begin{array}{c|c} A^{00} & -(A^{0j}) \\ \hline -(A^{i0}) & (A^{ij}) \end{array} \right)$$

total antisymmetrischer Tensor 4. Stufe

$\delta_0^0, g^{00}, g_{00}, \epsilon^{0123}, \epsilon_{0123}$ haben in allen IS
die gleichen Werte!