

Noether - Theorem

$$q_n = q_n(q', t, x)$$

$$L'(q', \dot{q}', t, x) = L(q(q', t, x),$$

$$\dot{q}(q', \dot{q}', t, x), t)$$

$$L \text{ invariant: } \left. \frac{dL'}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_n \frac{\partial L}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial x} \Big|_{x=0} = \text{const}$$

Eichttransformationen der
Lagrange - Funktion

$$L \mapsto L + \frac{d\Lambda}{dt}$$

$$\Lambda = \Lambda(\vec{r}, t)$$

$$y_n = y_n(y', \vec{r}, t, x)$$

$$\mathcal{L}'(y', \vec{v}y', \partial_t y', \vec{r}, t, x) =$$

$$\mathcal{L}(y(y', \vec{r}, t, x), \vec{v}y(y', \vec{v}y', \vec{r}, t, x),$$

$$\mathcal{L} \text{ invariant: } \left. \frac{d\mathcal{L}'}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (v y_n)} \frac{\partial y_n}{\partial x} \Big|_{x=0} \right)$$

$$+ \frac{d}{d\vec{r}} \left(\sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (v y_n)} \frac{\partial y_n}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) =$$

Eichttransformationen der
Lagrange - Dichte

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} + \frac{d\Lambda_0}{dt} + \frac{d}{d\vec{r}} \Lambda$$

$$\Lambda = \Lambda(y(\vec{r}, t), \vec{r}, t)$$

8.5 Noether-Theorem

betrachte Transformation des Felds T_α

$$y(\vec{r}, t) \longmapsto y'(\vec{r}, t)$$

α : kontinuierlicher Parameter mit

$$T_{\alpha=0} = \mathbb{1} \quad (\text{Identität})$$

schreibe:

Lagrange-Dichte

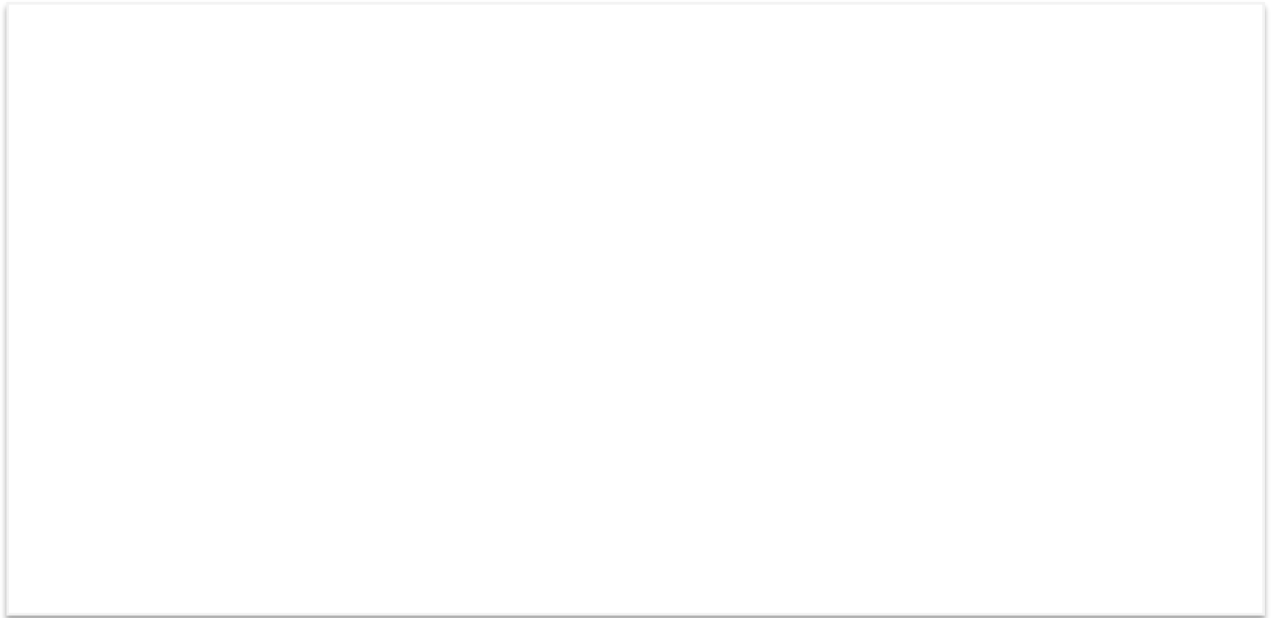
\mathcal{L} ist invariant unter T_α , falls

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(y', \vec{\nabla} y', \partial_t y', \vec{r}, t, \alpha) &= \mathcal{L}'(y', \vec{\nabla} y', \partial_t y', \vec{r}, t, \alpha=0) \\ &= \mathcal{L}(T_\alpha y', \vec{\nabla} T_\alpha y', \dots) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \mathcal{L}(y', \vec{\nabla} y', \partial_t y', \vec{r}, t) \end{aligned}$$

d.h. funktionale Gestalt unabhängig von α (und gleich der von \mathcal{L} !)

jetzt gilt:

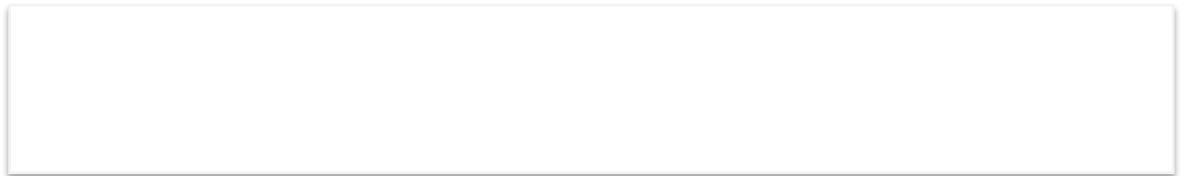
$$0 = \frac{d}{d\alpha} \mathcal{L}'(y', \vec{\nabla} y', \partial_t y', \vec{r}, t, \alpha) \Big|_{\alpha=0}$$
$$= \frac{d}{d\alpha} \mathcal{L}(T_\alpha y', \vec{\nabla} T_\alpha y', \partial_t T_\alpha y', \vec{r}, t) \Big|_{\alpha=0}$$



also

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r}, t) + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$$

mit Dichte



und Stromdichte



Bsp: s.m. (Schrödinger-Gleichung)

8.7 Komplexe Felder und Eichtransformation

Bsp: Schrödinger-Gleichung

(grundlegende dynamische Gleichung der QM,
hier: klassische Feldgleichung)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t)$$

i : imaginäre Einheit

\hbar : Plancksches Wirkungsquantum

$\psi(\vec{r}, t) \in \mathbb{C}$! ($V(\vec{r})$ reell)

m : Teilchenmasse (QM), hier: Parameter

beachte: $\psi = \operatorname{Re} \psi + i \operatorname{Im} \psi$

$$\psi^* = \operatorname{Re} \psi - i \operatorname{Im} \psi$$

2 unabhängige reelle Felder $\operatorname{Re} \psi$, $\operatorname{Im} \psi$

oder

2 unabhängige Felder ψ , ψ^*

→ gewöhnlicher Formalismus für f -komponentige
Felder

Wirbinger - Kalkül:

eine beliebige Funktion

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto f(z) \quad z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$$

kann immer eindeutig auch als Funktion von $z, z^* \in \mathbb{C}$ aufgefasst werden:

$$f(z) = f(x, y) = f(x + iy, x - iy) = f(z, z^*)$$

Bsp:

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = z z^* = f(z, z^*)$$

es ist ($z = x + iy, z^* = x - iy$)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z^*}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial z} - i \frac{\partial f}{\partial z^*}$$

und somit

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

beachte: in $f(z, z^*)$ sind z, z^* als unabhängig aufzufassen, $f(z)$ ergibt sich aber nur, falls z und z^* komplex konjugiert sind

Lagrange - Dichte zur Schrödinger - Gleichung:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \psi^*, \vec{\nabla}\psi, \vec{\nabla}\psi^*, \partial_t\psi, \partial_t\psi^*, \vec{A}, \phi)$$

\mathcal{L} ist reell

Herleitung der Feldgleichung

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{d}{d\vec{r}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla}\psi)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi)} \quad (*)$$

aus (*) folgt (da \mathcal{L} reell) durch komplexe Konjugation

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \frac{d}{d\vec{r}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla}\psi^*)} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi^*)}$$

Feldgleichungen für ψ und ψ^* sind äquivalent
(falls ψ und ψ^* komplex konjugiert sind)

es gilt $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \rightarrow$ Energieerhaltung

kanonisch konjugierte Felder:

Hamilton - Dichte:

Energiestromdichte

(**)

damit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_E = 0$$

(kann auch aus (*) und (**) und der Schr. - Glg. direkt verifiziert werden)