Noether-Theorem

$$q_n = q_n(q', t, \alpha)$$

$$L'(q', \dot q', t, \alpha) = L(q(q', t, \alpha), \dot q(q', \dot q', t, \alpha), t)$$

L invariant: $\left.\frac{dL'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$

$$\Rightarrow \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot q_n} \left.\frac{\partial q_n}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \text{const}$$

Eichtransformation der Lagrange-Funktion

$$L \mapsto L + \frac{d\Lambda}{dt}$$

$$\Lambda = \Lambda(\vec r, t)$$

$$y_n = y_n(y_n', \vec r, t, \alpha)$$

$$\mathcal{L}'(y', \vec\nabla y', \partial_t y', \vec r, t, \alpha) = \mathcal{L}(y(y', \vec r, t, \alpha), \vec\nabla y(y', \vec\nabla y', \vec r, t, \alpha), \dots)$$

$\mathcal{L}$ invariant: $\left.\frac{d\mathcal{L}'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t y_n)} \left.\frac{\partial y_n}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right) + \frac{d}{d\vec r}\left(\sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec\nabla y_n)} \left.\frac{\partial y_n}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\right) =$$

Eichtransformation der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} + \frac{d\Lambda_0}{dt} + \frac{d}{d\vec r}\vec\Lambda$$

$$\Lambda = \Lambda(y(\vec r, t), \vec r, t)$$

8.5 Noether-Theorem

betrachte Transformation des Felds T_α

$$\psi(\vec{r},t) \longmapsto \psi'(\vec{r},t)$$

α: <u>kontinuierlicher</u> Parameter mit

$T_{\alpha=0} = \mathbb{1}$ (Identität)

schreibe:

Lagrange-Dichte

$\mathcal{L}$ ist <u>invariant unter T_α</u>, falls

$$\mathcal{L}'(\psi', \vec{\nabla}\psi', \partial_t\psi', \vec{r}, t, \alpha) = \mathcal{L}'(\psi', \vec{\nabla}\psi', \partial_t\psi', \vec{r}, t, \alpha=0)$$

$$= \mathcal{L}(T_\alpha\psi', \vec{\nabla} T_\alpha\psi', \dots)\Big|_{\alpha=0}$$

$$= \mathcal{L}(\psi', \vec{\nabla}\psi', \partial_t\psi', \vec{r}, t)$$

d.h. funktionale Gestalt unabhängig von α (und gleich der von $\mathcal{L}$!)

jetzt gilt:

$$0 = \frac{d}{d\alpha} \mathcal{L}'(\psi^i, \vec{\nabla}\psi^i, \partial_t \psi^i, \vec{r}, t, \alpha)\Big|_{\alpha=0}$$

$$= \frac{d}{d\alpha} \mathcal{L}(T_\alpha \psi^i, \vec{\nabla} T_\alpha \psi^i, \partial_t T_\alpha \psi^i, \vec{r}, t)\Big|_{\alpha=0}$$

also

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r},t) + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r},t) = 0}$$

mit Dichte

und Stromdichte

Bsp: s.u. (Schrödinger-Gleichung)

8.7 Komplexe Felder und Eichtransformation

Bsp: Schrödinger-Gleichung

(grundlegende dynamische Gleichung der QM, hier: klassische Feldgleichung)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r},t) + V(\vec{r})\, \psi(\vec{r},t)$$

i: imaginäre Einheit

$\hbar$: Planck'sches Wirkungsquantum

$\psi(\vec{r},t) \in \mathbb{C}$! ($V(\vec{r})$ reell)

m: Teilchenmasse (QM), hier: Parameter

beachte: $\psi = \mathrm{Re}\,\psi + i\,\mathrm{Im}\,\psi$

$\psi^* = \mathrm{Re}\,\psi - i\,\mathrm{Im}\,\psi$

2 unabhängige reelle Felder $\mathrm{Re}\,\psi$, $\mathrm{Im}\,\psi$

oder

2 unabhängige Felder ψ, ψ^*

$\rightarrow$ gewöhnlicher Formalismus für f-komponentige Felder

Wirtinger - Kalkül:

eine beliebige Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto f(z) \qquad z = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

kann immer eindeutig auch als Funktion von $z, z^* \in \mathbb{C}$ aufgefasst werden:

$$f(z) = f(x, y) = f(x+iy, x-iy) = f(z, z^*)$$

Bsp:

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = z z^* = f(z, z^*)$$

es gilt $(z = x+iy,\ z^* = x-iy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z^*}\frac{\partial z^*}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z^*}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z^*}\frac{\partial z^*}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial z} - i\frac{\partial f}{\partial z^*}$$

und somit

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

beachte: in $f(z, z^*)$ sind z, z^* als unabhängig aufzufassen, $f(z)$ ergibt sich aber nur, falls z und z^* komplex konjugiert sind

Lagrange-Dichte zur Schrödinger-Gleichung:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \psi^*, \vec\nabla\psi, \vec\nabla\psi^*, \partial_t\psi, \partial_t\psi^*, \vec r, t)$$

$\mathcal{L}$ ist reell

Herleitung der Feldgleichung

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{d}{d\vec r}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec\nabla\psi)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)} \qquad (*)$$

aus (*) folgt (da $\mathcal{L}$ reell) durch komplexe Konjugation

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \frac{d}{d\vec r}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\vec\nabla\psi^*}\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi^*)}$$

Feldgleichungen für ψ und ψ^* sind äquivalent
(falls ψ und ψ^* komplex konjugiert sind)

es gilt $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow$ Energieerhaltung

kanonisch konjugierte Felder:

Hamilton-Dichte:

Energiestromdichte

(**)

damit

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_{\mathcal{H}} = 0$$

(kann auch aus (*) und (**) und der Schr.-Glg. direkt verifiziert werden)