8.3 Klassische Theorie für ein skalares Feld

skalares Feld $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$

Bsp: elektrostatisches Potenzial

Temperaturfeld

$D=2$ Trommelmembran $\varphi = \varphi(x, y, t)$

Auslenkung

Dynamik des Felds:

partielle DGL in $\vec{r}, t, \partial_x \varphi, \partial_y \varphi, \partial_z \varphi, \partial_t \varphi, \partial_x^2 \varphi,$

$\partial_y^2 \varphi, \partial_x \partial_y \varphi, \ldots$ etc

Postulat der klassischen Feldtheorie:

Die raumzeitlichen Änderungen (die "Dynamik") eines skalaren Felds $\varphi(\vec{r}, t)$ werden durch das Wirkungsprinzip beschrieben:

mit der Wirkung,

und einer Lagrange-Dichte der Form

$$\left(\vec{\nabla} y = \frac{\partial y}{\partial \vec{r}} \right)$$

- Dimension von $\mathcal{L}$: Energiedichte $= \text{Energie}/\text{Volumen}$
- alle phys. Grundgleichungen sind von dieser Form (d.h. z.B. $\mathcal{L}(\cancel{\vec{\nabla}^2 y}, \cancel{\partial_t^2 y}, \ldots)$)

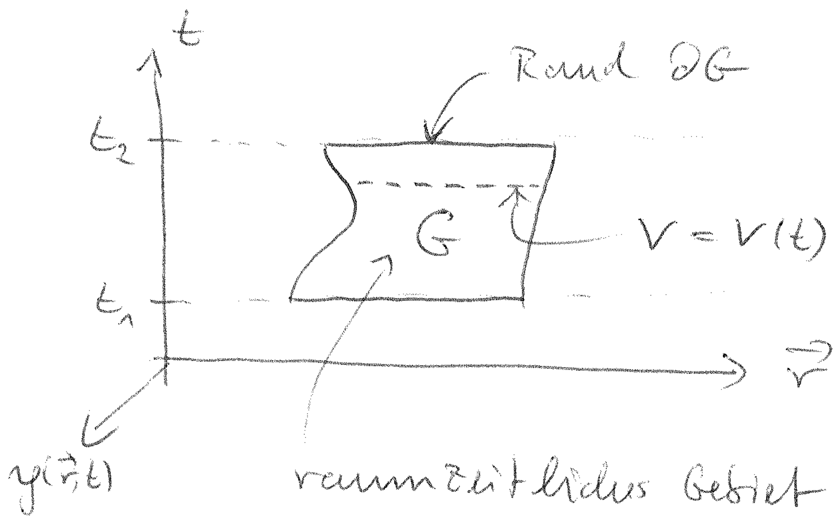
für die Variation des Felds $\delta y(\vec{r},t)$ gelten dabei die Randbedingungen

$$\delta y(\vec{r},t) = 0 \quad \text{für } \vec{r} \in \partial V \quad (\forall t)$$
$$\delta y(\vec{r},t) = 0 \quad \text{für } t = t_1, t = t_2 \quad (\forall \vec{r})$$

(∂V ist der Rand / die Oberfläche des Volumens V)

<u>oder:</u>

$$\delta y(\vec{r},t) = 0 \quad \text{für } (\vec{r},t) \in \partial G$$



beachte: meist ist $V = \mathbb{R}^3$ und $\delta y(\vec{r},t) = 0$ für "$\vec{r} \to \infty$"

Herleitung der Lagrange-Gleichung (Feldgleichung)

es gilt

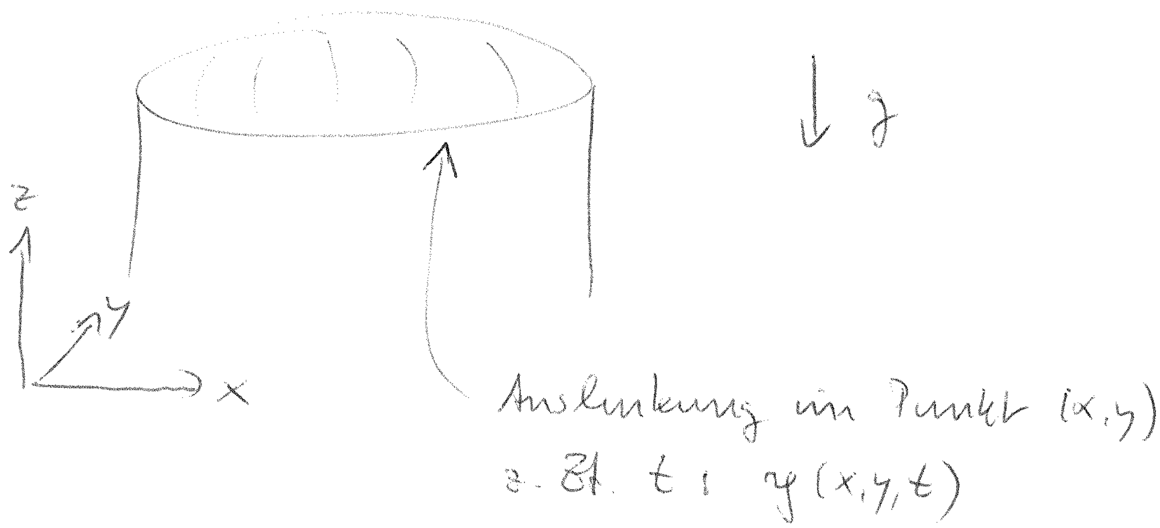
also:

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3r \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y(\vec{r},t)} - \frac{d}{d\vec{r}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla} y(\vec{r},t))} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t y(\vec{r},t))} \right] \delta y(\vec{r},t)$$

mit $\delta y(\vec{r},t)$ auf $G \setminus \partial G$ beliebig folgt

- in $\vec{r}$ und t symmetrische Formulierung
  (→ relativistische Verallgemeinerung)

Bsp.: homogene Membran (Trommel)



Kontinuumsmechanik liefert

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = -\frac{g}{c^2}$$

mit $c^2 = Y/\rho$ (c: Wellengeschwindigkeit)

Feldgleichung kann als $\delta S = 0$ geschrieben werden mit

es gilt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -g\mu \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} y)} = -Y \vec{\nabla} y \qquad \left(\text{mit } \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t y)} = \mu \, \partial_t y$$

also

$$0 = -g\mu - \frac{d}{d\vec{r}}\left(-Y \vec{\nabla} y\right) - \frac{d}{dt}\left(\mu \, \partial_t y\right)$$

$$= -g\mu + Y \vec{\nabla}^2 y - \mu \, \partial_t^2 y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c^2} \partial_t^2 y - \vec{\nabla}^2 y = -g/c^2$$

Die Feldgleichungen sind forminvariant unter der Eichtransformation der Lagrange-Dichte

8.4 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

es sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \nabla\psi, \partial_t\psi, \vec{r}, \cancel{t})$ nicht explizit zeitabhängig:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

Energieerhaltung? Def. der Feldenergie?

es gilt

und somit

Def: kanonisch konjugiertes Feld

(vergleiche $p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$)

Def: Hamilton-Dichte, Energie-Dichte

Def: Energiestromdichte

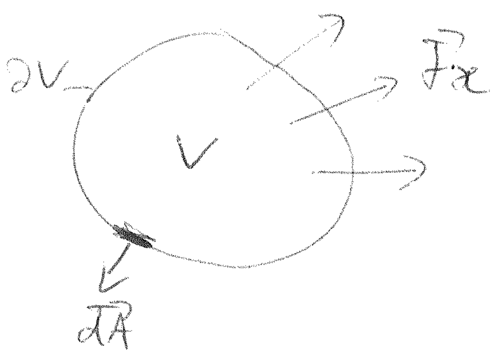
es folgt:

Energieerhaltung (differenziell)

integral:

$H_V = \int_V d^3r\, \mathcal{H}$ Energie im Volumen V

$\frac{dH_V}{dt} =$



sei jetzt $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \nabla\varphi, \partial_t\varphi, \vec{x}, t)$, also

es gilt:

also

8.6 Lagrange-Formalismus für Vektorfelder

- Vektorfeld $\vec{\varphi}(\vec{r},t)$ mit Komponenten $\varphi_n(\vec{r},t)$
- mehrere skalare Felder $\varphi_n(\vec{r},t)$

Zusammen:

$$\varphi_n(\vec{r},t) \qquad n = 1,\dots,f$$

Wirkungsprinzip

$$\delta S[\varphi_1,\dots,\varphi_f] = \delta S = 0$$

$$S = \int dt \int d^3r \, \mathcal{L}$$

Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_1,\dots,\varphi_f, \vec{\nabla}\varphi_1,\dots,\vec{\nabla}\varphi_f, \partial_t\varphi_1,\dots,\partial_t\varphi_f, \vec{r}, t)$$

Lagrange-Gleichungen:

Lagrange-Mechanik für Punktteilchen	Klassische Feldtheorie
(gen.) Koordinaten q_n $n = 1, \dots, f$	Felder $\varphi_n(\vec{r}, t)$ $n = 1, \dots, f$
Wirkungsprinzip $\delta S[q] = \delta \int dt \, L = 0$	$\delta S[\varphi] = \delta \int dt \int d^3r \, \mathcal{L} = 0$
Lagrange-Funktion $L = L(q, \dot{q}, t) = T - U$ $q = (q_1, \dots, q_f)$	Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \vec{\nabla}\varphi, \partial_t \varphi, \vec{r}, t)$ $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_f)$
Lagrange-Gleichungen $\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0$	Feldgleichungen $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_n} - \frac{d}{d\vec{r}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla}\varphi_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \varphi)} = 0$
kanonisch konj. Impuls $p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$	kanonisch konj. Feld $\pi_n(\vec{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \varphi_n(\vec{r}, t))}$
Hamilton-Funktion $H = \sum_n p_n \dot{q}_n - L = H(q, p, t)$	Hamilton-Dichte $\mathcal{H} = \sum_n \pi_n(\vec{r}, t) \frac{\partial \varphi_n(\vec{r}, t)}{\partial t} - \mathcal{L}$
Energie-Erhaltung $\frac{dH}{dt} = 0$ falls $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_{\mathcal{H}} = 0$ falls $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ $\vec{j}_{\mathcal{H}} = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi_n)} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t}$