8 Dynamik von Feldern

Lagrange-Formalismus für

Punktteilchen	Felder
↓	↓
Mechanik (von Massenpunkten)	Elektrodynamik (auch: Kontinuumsmechanik)
↓	↓
Quantenmechanik	Quantenfeldtheorie

8.1 Gekoppelte harmonische Oszillatoren

A) eindimensionaler, harmonischer Oszillator

m : Masse

k : Federkonstante $(k > 0)$

lineare Rückstellkraft

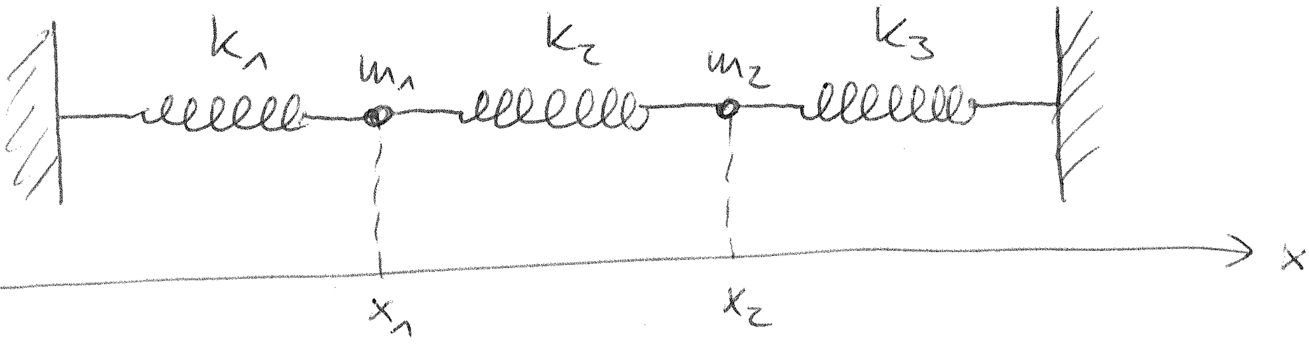
harmonisches Potenzial

NÄ :

Auslenkung als generalisierte Koordinate

Lagrange – Funktion

B) zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren



Auslenkungen $q_i = x_i - x_i^{(0)}$ $\quad i = 1, 2$

Rückstellkräfte

$\vec{F}_1 =$

$=$

$=$

$\vec{F}_2 =$

Lagrange-Funktion

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{q}_2^2$$

$$+ \frac{1}{2}k_1 q_1^2 + \frac{1}{2}k_2(q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2}k_3 q_3^2$$

---

c) N Oszillatoren

$$\vec{F}_i = \left(-k_i(q_i - q_{i-1}) + k_{i+1}(q_{i+1} - q_i)\right)\vec{e}_x$$

für $i = 1, .., N$ mit $\boxed{q_0 := 0 \, , \, q_{N+1} := 0}$

a: Gitterkonstante

$$F_i = -\frac{\partial}{\partial q_i} U(q_0, \dots, q_{N+1})$$

$\leftarrow$ Beiträge für $j = i$ und $j = i+1$

mit

$$U(q_0, \dots, q_{N+1}) = \sum_{j=1}^{N+1} \frac{1}{2} k_j (q_j - q_{j-1})^2$$

Lagrange-Funktion:

8.2 Kontinuumslimes und Lagrange-Dichte

betrachte den Limes

(Gummiband)

definiere

Massendichte

Young-Modul

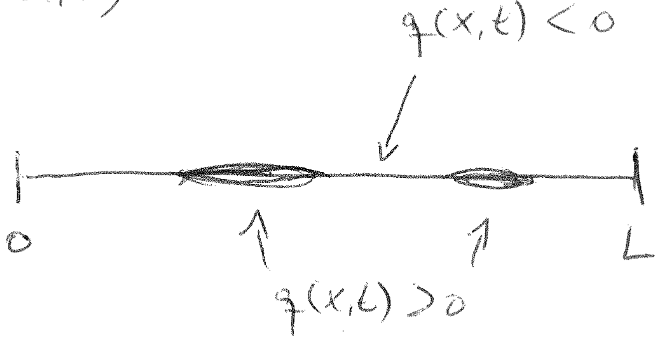
(kürzere Feder ist härter bei gleicher Rückstellkraft) im Kontinuumslimes ist

$$q_i \to q(x) \qquad x \in [0,L]$$

$$q_i(t) \to q(x,t)$$

$$\dot{q}_i(t) \to \frac{\partial}{\partial t} q(x,t)$$

Gummiband



t fest

es folgt:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_0}{2} \dot{q}_i^2 = \sum_i a \, \frac{1}{2} \frac{m_0}{a} \dot{q}_i^2 \to$$

$$\sum_{i=1}^{N+1} \frac{k_0}{2} (q_i - q_{i-1})^2 = \sum_i a \, \frac{1}{2} (k_0 a) \left(\frac{q_i - q_{i-1}}{a} \right)^2$$

$$\to$$

und

$$L_N(q, \dot{q}) \to$$

mit der Lagrange-Dichte

Kontinuumslimes:

$$L_N \xrightarrow{N\to\infty} L$$

$S_N = \int dt\, L_N$

Wirkungsprinzip

$\delta S_N = 0$

$S = \int dt\, L = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^L dx\, \mathcal{L}$

Wirkungsprinzip $\delta S = 0$

2

L II - Gleichungen für Punktmassen $q_i(t)$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Lagrange - Gleichungen für Feld $q(x,t)$ (Feldgleichungen) ?

$N \to \infty$

1

---

1) $$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$= -k_i(q_i - q_{i-1}) - k_{i+1}(q_i - q_{i+1}) - m_i \ddot{q}_i$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{m_i}{a}\ddot{q}_i = \frac{k_{i+1} a \frac{q_{i+1} - q_i}{a} - k_i a \frac{q_i - q_{i-1}}{a}}{a}$$

für $N \to \infty$, $a \to 0$, $Na = L$:

$$\mu(x) \cdot \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} =$$

also:

für homogenes Gummiband, $\mu(x) = \mu$, $Y(x) = Y$, gilt:

bzw.

Wellengleichung

Wellengeschwindigkeit c mit $c^2 = Y/m \leftarrow \frac{ka}{m/a}$

$= a^2 \frac{k}{m} = a^2 \omega^2$, $c = a\omega$ $\left(\omega = \sqrt{k/m} \right)$

2) Herleitung der Wellengleichung aus $\delta S = 0$:

Wirkungsprinzip :

Randbedingungen :

es gilt

$$0 = \delta S = \int dt \int dx \; \delta \mathcal{L}$$

δ : Variation des Felds :

$$q(x,t) \mapsto q(x,t) + \delta q(x,t)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}(x,t) \mapsto \frac{\partial q}{\partial x}(x,t) + \delta \frac{\partial q}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \delta q(x,t)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}(x,t) \mapsto \frac{\partial q}{\partial t}(x,t) + \delta \frac{\partial q}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \delta q(x,t)$$

also:

partielle Integration:

Randterme

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q/\partial x)}\, \delta q(x,t) \Big|_{x=0}^{x=L} = 0 \qquad \delta q(0,t) = \delta q(L,0) = 0 \quad \forall t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q/\partial t)}\, \delta q(x,t) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} = 0 \qquad \delta q(x,t_1) = \delta q(x,t_2) = 0 \quad \forall x$$

Kurzschreibweise

damit ist

$\delta q(x,t)$ beliebige Variation $\Rightarrow$

hier: $\mathcal{L}(\cancel{q}, \partial_x q, \partial_t q, x, \cancel{t}) = \frac{\mu(x)}{2}(\partial_t q)^2 - \frac{Y(x)}{2}(\partial_x q)^2$

also

$$0 = 0 - \frac{d}{dx}\left(-\frac{Y(x)}{2}\, 2\,\partial_x q\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu(x)}{2}\, 2\,\partial_t q\right)$$

$$= Y'(x)\,\frac{\partial q}{\partial x}(x,t) + Y(x)\,\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(x,t) - \mu(x)\,\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}(x,t)$$

homogener Fall: