z.B. ort

für eine beliebige Funktion F gilt:

$$\boxed{\{q_n, F(q)\} = 0 \qquad \{p_n, F(p)\} = 0}$$

z.B. ort

weiter gilt

$$\boxed{\{q_n, F(p)\} = \frac{\partial F(p)}{\partial p_m} \qquad \{p_n, F(q)\} = -\frac{\partial F(q)}{\partial q_n}}$$

z.B.

komplexe Klammern auf einfache zurückführen:

für $A(q,p,t)$, $B(q,p,t)$, $C(q,p,t)$

und $c_1, c_2, c \in \mathbb{R}$ gilt

Antisymmetrie

Linearität

Produktregel

Jacobi-Identität

(Beweise einfach, außer Jacobi-Identität)

Bsp: rein algebraische Herleitung der Bewegungsgleichung für einen harmonischen Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

Erhaltungsgrößen:

Sei $A(q, p, \cancel{t})$ nicht explizit zeitabhängig

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{A, H\} = 0}$$

Bsp: Hamilton-Funktion (mit $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$)

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad , \text{ denn } \{H, H\} = -\{H, H\} = 0$$

Bsp: $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \quad , \text{ denn } \{L_z, H\} = 0 \qquad \text{analog } L_y, L_x$$

seien A, B nicht explizit zeitabhängig

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = 0 \quad \frac{dB}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\{A, B\}}{dt} = 0}$$

(Poissonscher Satz)

Beweis:

Bsp: $L_x, L_y = \text{const}$ für $V = V(r)$

7.4 Kanonische Transformationen

L II forminvariant unter Punkttransformationen, d.h. für beliebiges $q = q(Q,t)$ ist

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_n} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_n} = 0$$

mit $\bar{L}(Q,\dot{Q},t) = L(q(Q,t), \dot{q}(Q,\dot{Q},t), t)$

---

beliebige Transformationen („Phasentransformationen")

$$q = q(Q,P,t)$$
$$p = p(Q,P,t)$$

lassen die kanonischen Gleichungen <u>nicht</u> forminvariant! (s.u.)

Def: Zwei Sätze $Q = (Q_1, .., Q_f)$ und $P = (P_1, .., P_f)$ heißen <u>kanonische Variablen</u> und Q und P heißen zueinander <u>kanonisch konjugiert</u>, falls

Def: Eine Phasentransformation $(Q,P) \mapsto (Q',P')$ heißt <u>kanonisch</u> falls

(Q,P) kanonische Variablen

$$\Longleftrightarrow$$

(Q',P') kanonische Variablen

- (q,p), also generalisierte Koordinaten und Impulse, sind (trivialerweise) kanonische Variablen, denn es gilt
$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \qquad \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}$$

- ist die Phasentransformation $(q,p) \to (Q,P)$ kanonisch, dann sind (Q,P) kanonische Variablen

---

<u>Kriterium für Kanonizität?</u>

seien (q,p) kanonisch

$$q = q(Q,P) \qquad (\text{zeitunabhängig})$$
$$p = p(Q,P)$$

und $\tilde{H}(Q,P,t) = H(q(Q,P), p(Q,P), t)$

(Q,P) kanonisch?

z.z. $\dot{Q}_n = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial P_n} \qquad \dot{P}_n = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_n}$