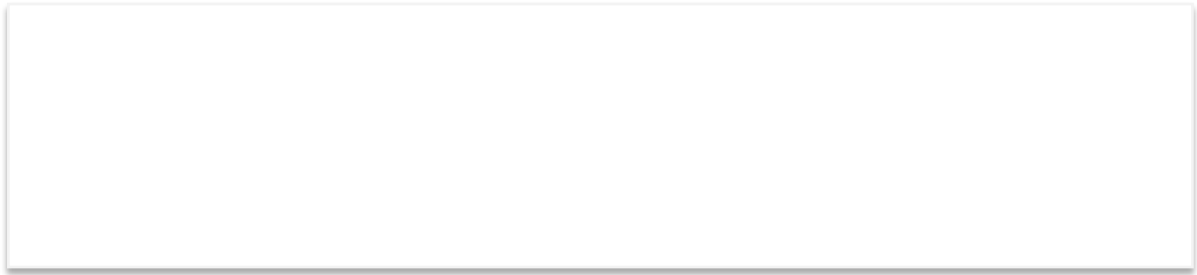


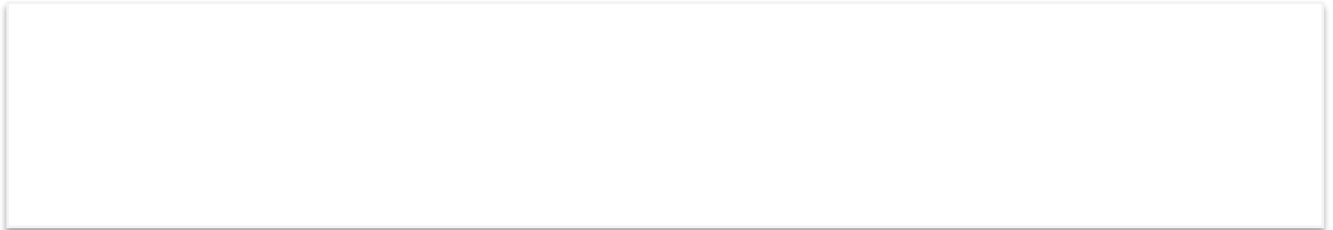
z.B. OR



für eine beliebige Funktion  $F$  gilt:

$$\{q_n, F(q)\} = 0 \quad \{p_n, F(p)\} = 0$$

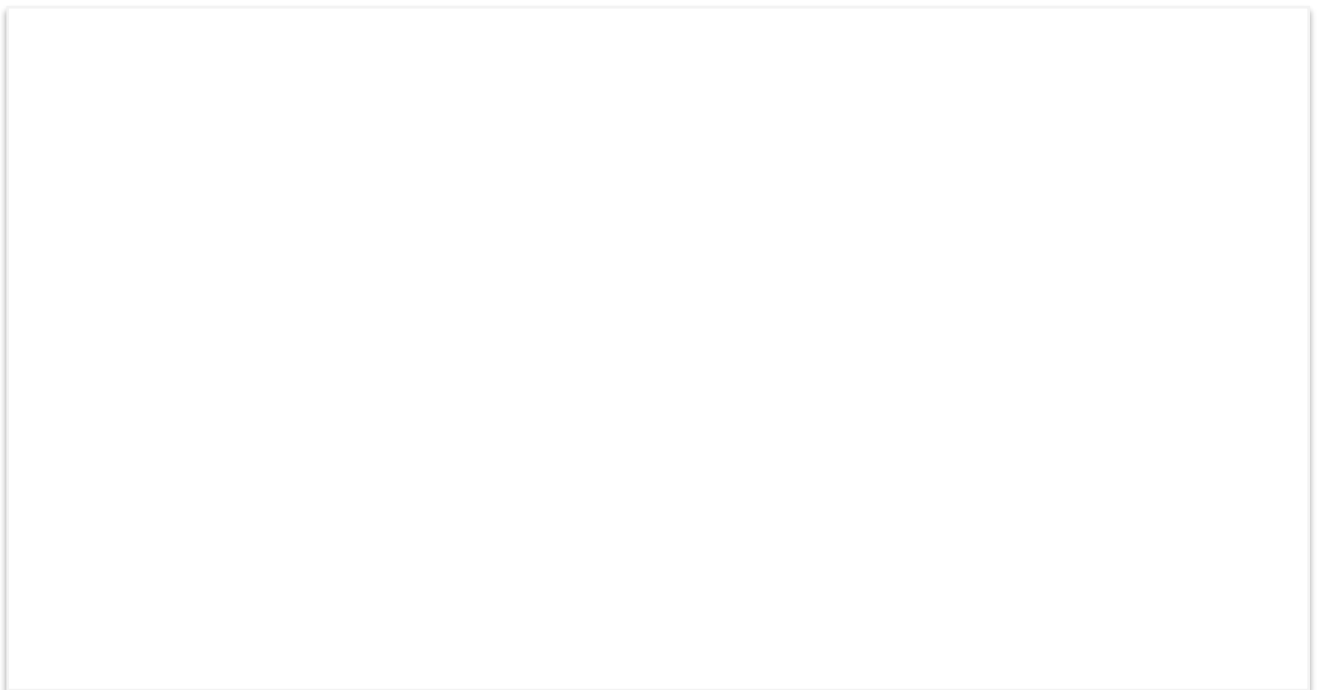
z.B. OR



weiter gilt

$$\{q_n, F(p)\} = \frac{\partial F(p)}{\partial p_n} \quad \{p_n, F(q)\} = -\frac{\partial F(q)}{\partial q_n}$$

z.B.



Komplexe Klammern auf einfache zurückführen:

für  $A(q,p,t)$ ,  $B(q,p,t)$ ,  $C(q,p,t)$

und  $c_1, c_2, c \in \mathbb{R}$  gilt

Antisymmetrie

Linearität

Produktregel

Jacobi-Identität

(Beweise einfach, außer Jacobi-Identität)

---

Bsp. rein algebraische Herleitung der Bewegungsgleichung  
für einen harmonischen Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

Erhaltungsgrößen:

sei  $A(q, p, t)$  nicht explizit zeitabhängig

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = 0 \iff \{A, H\} = 0}$$

Bsp: Hamilton-Funktion (mit  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ )

$$\frac{dH}{dt} = 0, \text{ denn } \{H, H\} = -\{H, H\} = 0$$

$$\text{Bsp: } H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$$

$$\frac{dL_z}{dt} = 0, \text{ denn } \{L_z, H\} = 0 \quad \text{analog } L_y, L_x$$

seien  $A, B$  nicht explizit zeitabhängig

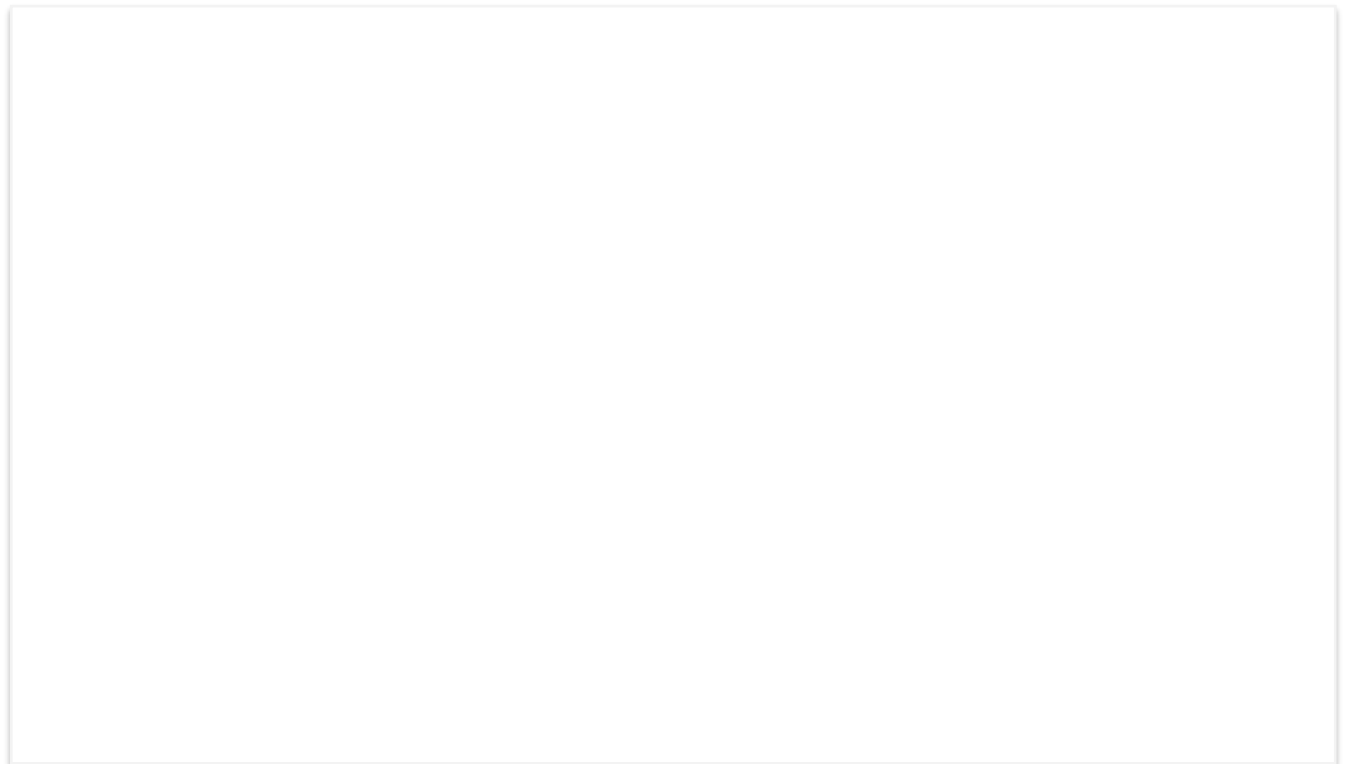
$$\boxed{\frac{dA}{dt} = 0 \quad \frac{dB}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\{A, B\}}{dt} = 0}$$

(Poissonscher Satz)

Beweis:



Bsp:  $L_x, L_y = \text{const}$  für  $V = V(r)$



## 7.4 Kanonische Transformationen

$L$  forminvariant unter Punkttransformationen,  
d.h. für beliebiges  $q = q(Q, t)$  ist

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_n} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_n} = 0$$

mit  $\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t)$

---

beliebige Transformationen ("Phasentransformationen")

$$q = q(Q, P, t)$$

$$p = p(Q, P, t)$$

lassen die kanonischen Gleichungen nicht  
forminvariant! (s.n.)

---

Def.: Zwei Sätze  $Q = (Q_1, \dots, Q_f)$  und  $P = (P_1, \dots, P_f)$   
heißen kanonische Variablen und  $Q$  und  $P$   
heißen zueinander kanonisch konjugiert, falls

Def. Eine Phasentransformation  $(Q, P) \mapsto (Q', P')$   
heißt kanonisch falls

$(Q, P)$  kanonische Variablen

$\Leftrightarrow$

$(Q', P')$  kanonische Variablen

–  $(q, p)$ , also generalisierte Koordinaten und Impulse,  
sind (bzw. alle) kanonische Variablen, denn es  
gilt

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \quad \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}$$

– ist die Phasentransformation  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$   
kanonisch, dann sind  $(Q, P)$  kanonische Variablen

---

Kriterium für Kanonizität?

seien  $(q, p)$  kanonisch

$$\begin{aligned} q &= q(Q, P) && \text{(zeitunabhängig)} \\ p &= p(Q, P) \end{aligned}$$

$$\text{und } \hat{H}(Q, P, t) = H(q(Q, P), p(Q, P), t)$$

$(Q, P)$  kanonisch?

$$\text{z. B. } \dot{Q}_n = \frac{\partial \hat{H}}{\partial P_n} \quad \dot{P}_n = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial Q_n}$$