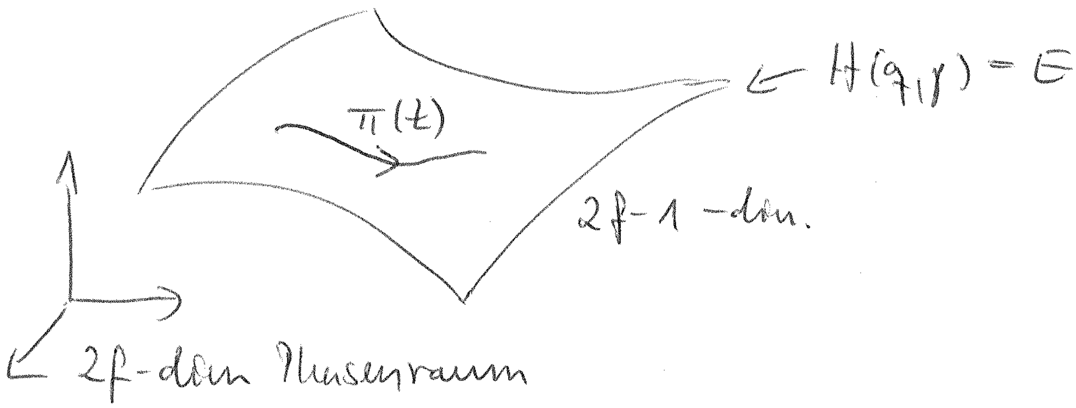
Energieerhaltung

$$H(q(t), p(t)) = E = \text{const} \quad \forall t$$

Phasentrajektorie $(q(t), p(t))$ verläuft innerhalb der $(2f-1)$-dimensionalen Hyperfläche $H(q,p) = E$



→ statistische Physik

Ergodenhypothese: $\pi(t)$ kommt für $t \to \infty$ (für makroskopische Zeiten) jedem Punkt von $H = E$ beliebig nahe

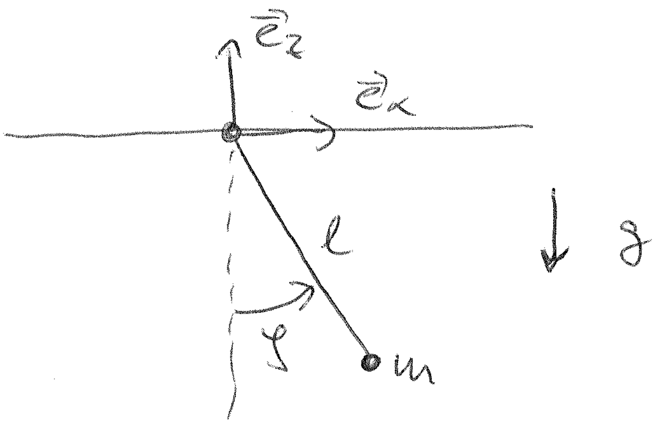
---

Zyklische Koordinaten:

7.2 Hamiltonsche Systeme

Hamilton-Schema zur Behandlung mechanischer Probleme:

A) Pendel



$f = 1$

generalisierte Koordinate: φ

$$x = l \sin \varphi \qquad \dot{x} = l \cos \varphi \, \dot{\varphi}$$

$$z = -l \cos \varphi \qquad \dot{z} = l \sin \varphi \, \dot{\varphi}$$

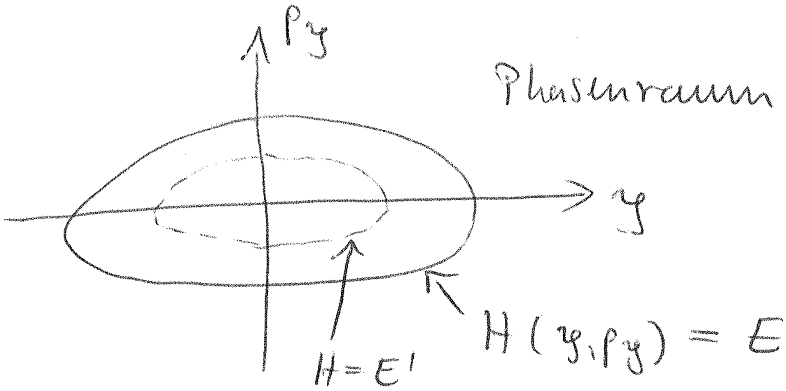
$$V = mgz = -mgl\cos\varphi$$

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$$

---

für kleine φ gilt: $\cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$

$$H(\varphi, p_\varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} + \frac{1}{2} mgl\,\varphi^2 - mgl$$



Statistik: Phasenvolumen Γ = $(2f-1)$-dim Volumen der $H=E$-Hyperfläche

Entropie $S = k_B \ln\Gamma$

(sinnvoll für $N \to \infty$)

---

hier: Hamilton-Gleichungen

p_y eliminieren:

B „freies" Teilchen ($N=1$, keine ZB)

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - V(\vec{r})$$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} \qquad \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m}$$

hier: (mech = gen. Impuls)

$$H(\vec{r},\vec{p}) = \vec{p}\,\dot{\vec{r}} - L = \vec{p}\cdot\frac{\vec{p}}{m} - \frac{m}{2}\frac{\vec{p}^{\,2}}{m^2} + V(\vec{r})$$

$$\boxed{H(\vec{r},\vec{p}) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{r})}$$

kanonische Gleichungen

$$-\dot{\vec{p}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \qquad \dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m}$$

zusammen:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \qquad (\mathrm{N\,II})$$

c) $N=1$, Kugelkoordinaten

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, \dot{\varphi}^2\right)$$

liefert

(für krummlinig orthogonale Koordinaten ist $p_n = p_n(\dot{q}_n)$ statt $p_n = p_n(\dot{q})$)

damit folgt

und mit

für $V = V(r)$ ist z.B.

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad (\varphi \text{ zyklisch}) \qquad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \qquad p_\varphi = \text{const}$$

d.h. $m r^2 \sin^2\vartheta\, \dot{\varphi} = \text{const}$ $\quad (l_z = \text{const})$

D Teilchen im elektromagnetischen Feld

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\,\Phi(\vec{r}, t) + q\,\dot{\vec{r}}\,\vec{A}(\vec{r}, t)$$

(q: Ladung, Φ, $\vec{A}$: skalares und Vektorpotenzial)

generalisierter Impuls

damit

7.3 Poisson-Klammer

Elemente einer physikalischen Theorie (KM, QM)

1) <u>Zustand</u>

(Angabe von Größen zur eindeutigen Charakterisierung des Systems)

Hamilton: $(q,p) = \overline{u}$

Zustandsraum: Phasenraum $\{\overline{u}\}$

2) <u>Observable</u>

(messbare physikalische Größen)

Bsp: $H, \vec{L}, \vec{P}_{tot} = \sum_i \vec{p}_i, \ldots$

KM: Observable sind Funktionen des Zustands

$$A = A(\overline{u}) = A(q,p)$$

Bsp: $H = H(q,p)$, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, etc

evtl. mit expliziter Zeitabhängigkeit $A = A(\overline{u}, t)$

Bsp: $H = H(q,p,t)$ (rheonome ZB)

$\vec{R} - \frac{\vec{P}}{M} \cdot t$ (Erhaltungsgröße zu den speziellen Galilei-Transf.)

$V(\vec{r},t) = q \cdot \Phi(\vec{r},t)$

etc.

QM: Zustand $|\psi\rangle$ Vektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

Zustandsraum $\{|\psi\rangle\} = \mathcal{H}$ Hilbert-Raum

Observable $\hat{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linearer Operator

3) Dynamische Grundgleichung

für den Zustand

$$\pi = \pi(t)$$

gegeben durch

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}$$

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}$$

für die Observable

$$A = A(t)$$

gegeben durch

?

Zusammenhang: Wert von A im Zustand π z.Zt. t

$$A(\pi(t), t) = A(t)$$

$$A(\pi(t)) = A(t) \quad \text{(ohne expl. Zeitabh.)}$$

es gilt

Def: Seien $A(q,p,t)$, $B(q,p,t)$ (skalare) Observable

damit gilt

Poisson-Klammer unabhängig von der Wahl der generalisierten Koordinaten und Impulse! (s.u.)

also gilt

koordinatenunabhängige Bewegungsgleichung für Observable

H bestimmt die Dynamik!

QM Grundgleichung für

Zustand	Observable
$i\hbar \frac{d}{dt}\lvert\psi(t)\rangle = \hat{H}\lvert\psi(t)\rangle$	$i\hbar \frac{d}{dt}\hat{A}(t) = [\hat{A},\hat{H}](t) + i\hbar \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$
Schrödinger-Gleichung	Heisenberg-Gleichung

Kommutator $[\hat{A},\hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

KM Observable = Zustandsfunktionen

→ q_n, p_n sind spezielle Observable

→ Grundgleichung für Zustände und Observable identisch !?

symmetrisch in $q \leftrightarrow p$!

Test:

$$\dot{q}_n = \frac{d}{dt} q_n = \{q_n, H\} + \cancel{\frac{\partial}{\partial t} q_n} = \{q_n, H\}_{qp}$$

$$= \sum_m \Big(\underbrace{\frac{\partial q_n}{\partial q_m}}_{\delta_{nm}} \frac{\partial H}{\partial p_m} - \underbrace{\frac{\partial q_n}{\partial p_m}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial q_n} \Big) = \frac{\partial H}{\partial p_m} \quad ✓$$

analog: $\dot{p}_m = \dots = -\frac{\partial H}{\partial q_m}$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}_n &= \{q_n, H\} \\ \dot{p}_n &= \{p_n, H\} \end{aligned}}$$

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$ Berechnung von $\{A, H\}$?

rein <u>algebraisches</u> Problem!

<u>Poisson-Klammer-Algebra:</u>

es gilt (fundamentale Poisson-Klammern)

$$\boxed{\begin{aligned} &\{q_n, q_m\} = 0 \qquad \{p_n, p_m\} = 0 \\ &\{q_n, p_m\} = \delta_{nm} \qquad \forall\, n, m = 1, \dots, f \end{aligned}}$$