

δ -Variation lässt $q(t_1), q(t_2)$ fest

also: $\delta S[q(t)] = \delta S'[q(t)]$ ✓

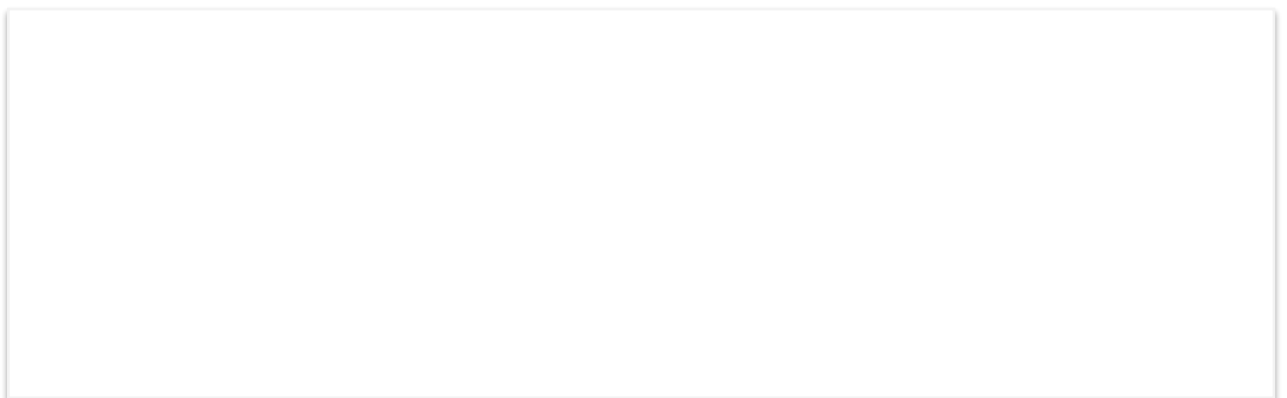
und: nur ein Term der Form $\frac{d}{dt} \Lambda(q, t)$
liefert keinen Beitrag bei Variationen des
Wirkungsfunktionals!

Hamilton-Prinzip erklärt die "Eichfreiheit"

2) Punkttransformationen

$L\bar{H}$ forminvariant unter $q \mapsto q'$, $t = t(q', t)$

Beweis: (mit Hamilton-Prinzip)



- kurzer, klarer Beweis

- beachte q_n unabhängig $\Leftrightarrow q'_n$ unabhängig

- $q(t_0) = q_0 \Leftrightarrow q'_0(t_0) = q'_0$

(Randbedingungen sind mit Φ transformieren)

3) Berücksichtigung von ZB

K holonome ZB $f_s(x, t) = 0 \quad s = 1, \dots, K$

d.h. $\tilde{L}(x, \dot{x}, t) = \sum_j \frac{m_j}{2} \dot{x}_j^2 - U(x_1, \dots, x_{3N})$

keine gültige Lagrange-Funktion $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_j} \neq 0$
i. allg.

aber:

$$\delta \int \tilde{L}(x, \dot{x}, t) dt = 0 \quad \text{gültig}$$

falls $\delta =$ Variation der Bahn, die mit ZB verträglich ist!

denn:

$$0 \stackrel{!}{=} \delta S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_j} \right) \delta x_j$$

nicht
unabhängig
↓

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j (F_j - m_j \ddot{x}_j) \delta x_j$$

$\delta x_j = \delta x_j(t)$ Variation der Bahn

spezielle Variation: $\delta x_j(t) = \delta x_j \cdot h(t)$

↑
zeitunabhängige

virtuelle Verschiebung

↑
beliebige Funktionen

mit $h(t_1) = h(t_2) = 0$

$h(t)$ beliebig, also:

$$\delta S[x(t)] = 0 \Leftrightarrow \sum_j (F_j - m_j \ddot{x}_j) \delta x_j = 0$$

(d'Alembertsches Prinzip)

Fazit:

$\delta S = 0$ kann auch in beliebigen Koordinaten ausgewertet werden, falls ZB durch entsprechend eingeschränkte Variationen berücksichtigt werden!

4) Nichtholonome ZB

differenzielle ZB

$$\sum_j a_{sj} dx_j + b_s dt = 0 \quad s = 1, \dots, K$$

$$a_{sj} = a_{sj}(x, t) \quad b_s = b_s(x, t)$$

es folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left(\sum_s a_{sj} \lambda_s \right) \delta x_j = 0$$

$$\forall \lambda_s = \lambda_s(x, \dot{x}, t) \quad s = 1, \dots, K$$

δx_j : virtuelle Verrückung z. Zt. t ($\delta x_j = \delta x_j(t)$)
(imp., momentan, respektiert ZB)

also gilt auch $\delta S[x(t)] = 0 \Rightarrow$

für virtuelle Verrückungen δx_j mit $\delta x_j(t_1) = \delta x_j(t_2) = 0$
also auch für

$$\delta x_j(t) = \delta x_j \cdot h(t)$$

mit

$$h(t) \text{ beliebig (aber } h(t_1) = h(t_2) = 0)$$

⇒

$$\sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} + \sum_s a_{sj} \lambda_s \right) = 0$$

Aufteilung der Summe:

$$j = \underbrace{1, \dots, 3N-K}_{\text{verbleibende}} , \underbrace{3N-K+1, \dots, 3N}_{K \text{ Summanden}} = 0$$

verbleibende

$$3N-K = f$$

Verrückungen

können als

unabhängig gesehen

werden

K Summanden $= 0$

durch Wahl der K

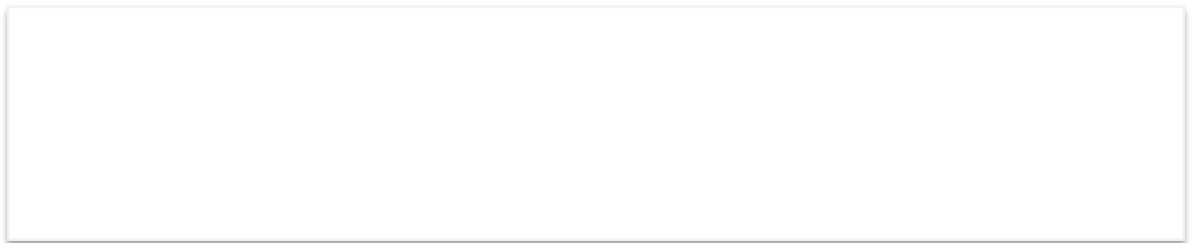
Lagrange-Parameter λ_s

also: $(\dots) = 0 \quad \forall j$

d.h.

$\delta \mathcal{S} = 0$ für mit den differenziellen ZB
kompatiblen Variationen der Bahn

⇒



5) Pfadintegral und Quantenmechanik

QM: Konzept der Teilchenbahn sinnlos:

Ort und Impuls nicht gleichzeitig scharf messbar

$$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar$$

Statt dessen gilt: ($N=1$)

Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen bei (\vec{r}_2, t_2) zu finden, falls es bei (\vec{r}_1, t_1) war

$$|U(\vec{r}_2, t_2, \vec{r}_1, t_1)|^2$$

7 Hamilton-Formalismus

7.1 Kanonische Gleichungen

konservatives N -Teilchen-System, holonome ZB

$$L(q, \dot{q}, t) = T - U$$

generalisierter Impuls

auflösen nach \dot{q}_n liefert

Def: Hamilton-Funktion

Exp: freies Teilchen, ebene Bewegung, Polarkoordinaten

$$L(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2)$$

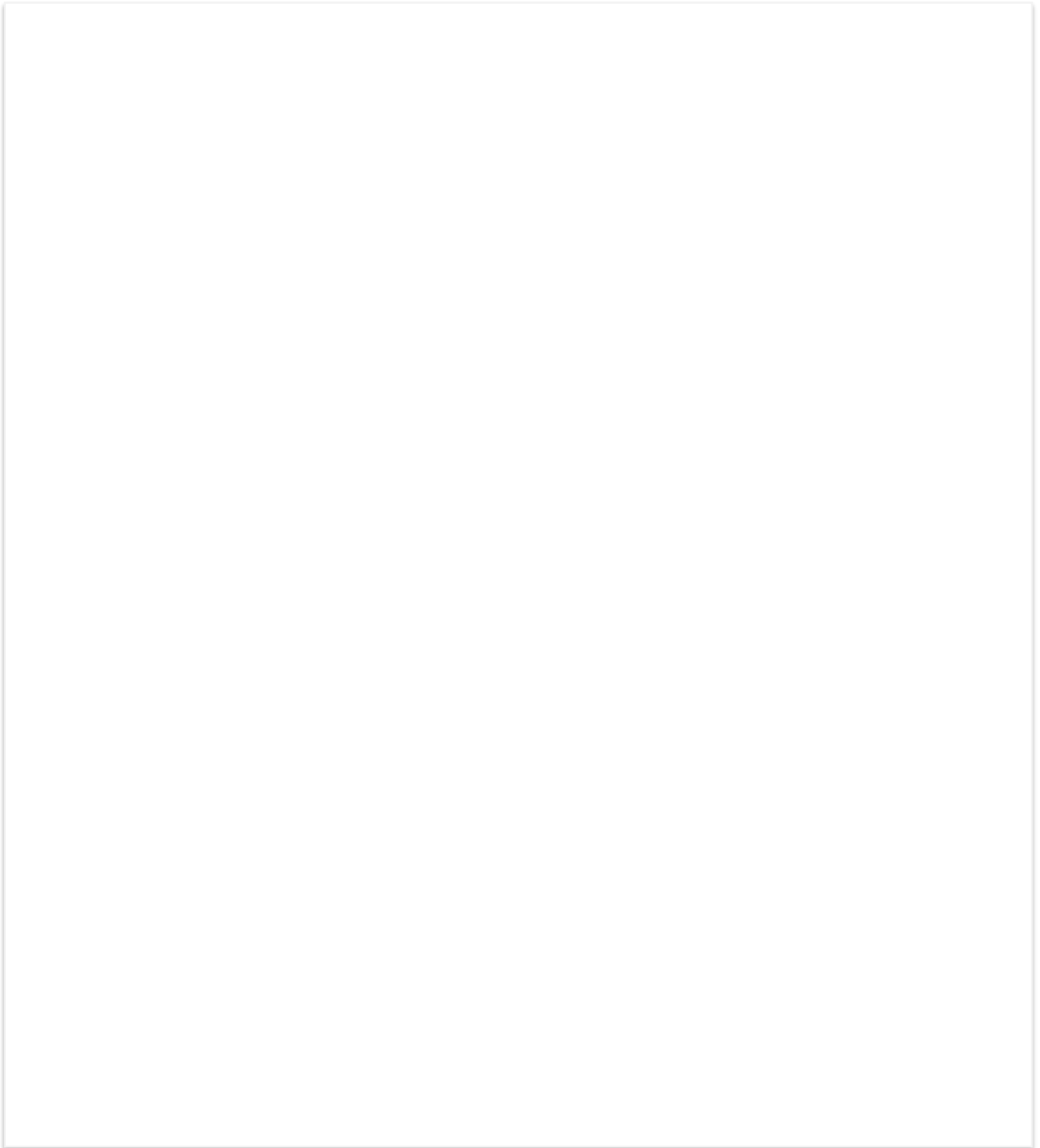
$$\text{also: } p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m \dot{\rho} \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = \frac{1}{m} p_\rho$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \rho^2 \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{m \rho^2} p_\varphi$$

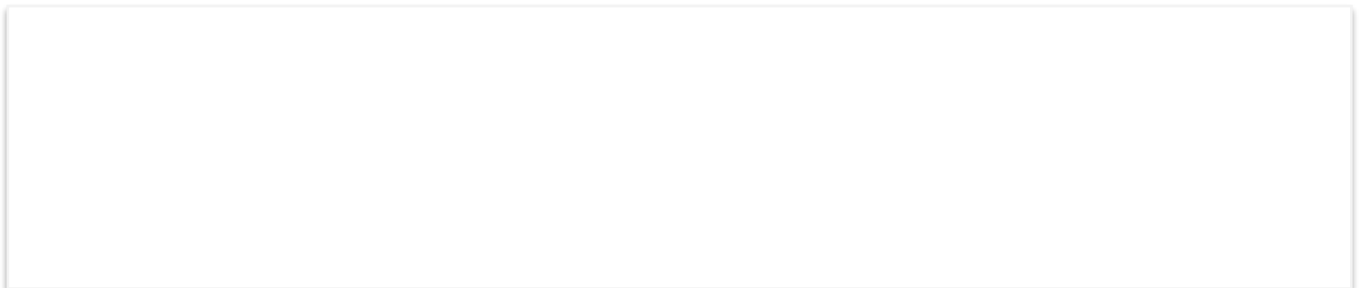
$$H(\rho, \varphi, p_\rho, p_\varphi) = p_\rho \cdot \frac{1}{m} p_\rho + p_\varphi \cdot \frac{1}{m \rho^2} p_\varphi$$

$$= \frac{m}{2} \left(\frac{p_\rho^2}{m^2} + \rho^2 \frac{p_\varphi^2}{m^2 \rho^4} \right) = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m \rho^2}$$

partielle Ableitungen von $H(q, p, t)$:



Hamiltonsche Bewegungsgleichungen
(kanonische Gleichungen)



2 f DGL's 1. Ordnung bestimmen mit

2 f Anfangsbedingungen

$$q_n(t_0) = q_{n0} \quad p_n(t_0) = p_{n0}$$

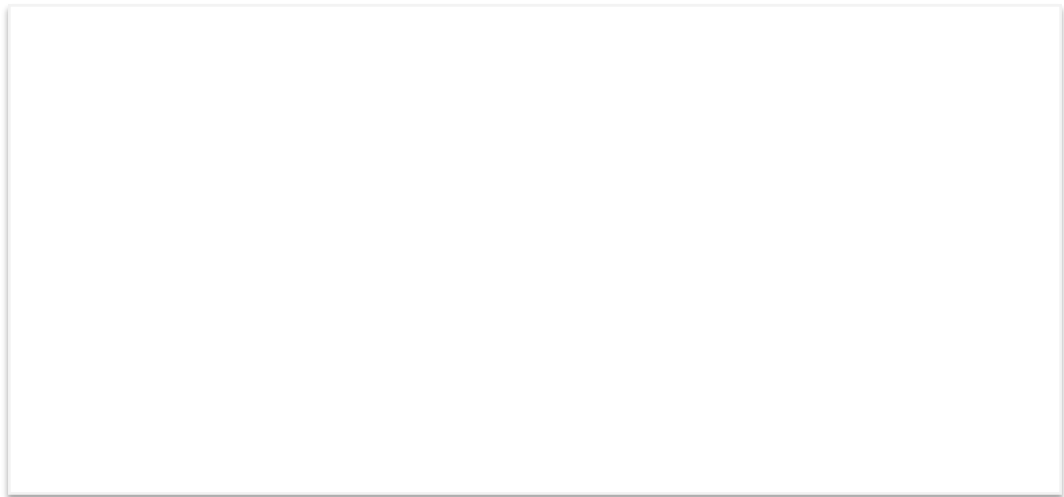
die Dynamik des Systems, d.h.

$$q(t) \text{ und } p(t)$$

(q, p) ist ein Punkt des 2f-dimensionalen

Phasenraums

$\pi = (q, p)$ heißt Phase



Vorteile gegenüber Lagrange-Formalismus:

1) Symmetrie der Gleichungen

q, p gleichberechtigt

große Klasse an Symmetrietransformationen

2) H hat direkte phys. Bedeutung (L nicht)

falls a) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

b) $x_j = x_j(q, \dot{q})$

skleronome ZB mit
 t -unabh. Trsf. formeln

$$a) \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

es folgt



$$b) \quad x_j = x_j(q) \quad t\text{-unabhängig}$$

es folgt

$$T = \sum_j \frac{m_j}{2} \dot{x}_j^2 = \sum_{mn} \frac{1}{2} a_{mn}(q) \dot{q}_m \dot{q}_n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sum_n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n = T$$

$$\Rightarrow \sum_n p_n \dot{q}_n = 2T \quad (\text{siehe auch oben})$$

also

$$H = \sum_n p_n \dot{q}_n - L = 2T - (T - U) = T + U$$

$$H(q, p) = E = \text{const} \quad \text{Gesamtenergie}$$