δ: Variation lässt $q(t_1)$, $q(t_2)$ fest

also: $\delta S[q(t)] = \delta S'[q(t)]$ ✓

und: <u>nur</u> ein Term der Form $\frac{d}{dt}\Lambda(q,t)$ liefert keinen Beitrag bei Variation des Wirkungsfunktionals!

Hamilton-Prinzip <u>erklärt</u> die „Eichfreiheit"

2) Punkttransformationen

L II forminvariant unter $q \mapsto q'$, $q = q(q',t)$

<u>Beweis:</u> (mit Hamilton-Prinzip)

- kurzer, klarer Beweis
- beachte q_n unabhängig $\Leftrightarrow$ q_n' unabhängig
- $q(t_i) = q_i \Leftrightarrow q'(t_i) = q_i'$

  (Randbedingungen sind mitzutransformieren)

3) Berücksichtigung von ZB

K holonome ZB $\quad f_s(x,t) = 0 \quad s = 1,\dots,K$

d.h. $$L(x,\dot{x},t) = \sum_j \frac{m_j}{2}\dot{x}_j^2 - U(x_1,\dots,x_{3N})$$

keine gültige Lagrange-Funktion $\quad \frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \neq 0$ i. allg.

aber:

$$\delta \int \tilde{L}(x,\dot{x},t)\,dt = 0 \qquad \text{gültig}$$

falls δ = Variation der Bahn, die mit ZB verträglich ist!

denn:

$$0 \overset{?}{=} \delta S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_j} \right) \overset{\substack{\text{nicht}\\ \text{unabhängig}}}{\delta x_j}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j (F_j - m_j \ddot{x}_j)\,\delta x_j$$

$\delta x_j = \delta x_j(t)$ Variation der Bahn

spezielle Variation: $\delta x_j(t) = \delta x_j \cdot h(t)$

zeitunabhängige virtuelle Verrückung

beliebige Funktion mit $h(t_1) = h(t_2) = 0$

$h(t)$ beliebig, also:

$$\delta S[x(t)] = 0 \iff \sum_j (F_j - m_j \ddot{x}_j)\,\delta x_j = 0$$

(d'Alembertsches Prinzip)

<u>Fazit:</u> $\delta S = 0$ kann auch in beliebigen Koordinaten ausgewertet werden, falls ZB durch entsprechend eingeschränkte Variation berücksichtigt werden!

4) Nichtholonome ZB

differenzielle ZB

$$\sum_j a_{sj}\, dx_j + b_s\, dt = 0 \qquad s = 1, .., K$$

$$a_{sj} = a_{sj}(x,t) \quad b_s = b_s(x,t)$$

es folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left(\sum_s a_{sj} \lambda_s \right) \delta x_j = 0$$

$\forall\ \lambda_s = \lambda_s(x, \dot{x}, t) \quad s = 1, .., K$

δx_j : virtuelle Verrückung z. Zt. t $\left(\delta x_j = \delta x_j(t) \right)$

(inf., momentan, respektiert ZB)

also gilt auch $\delta S[x(t)] = 0 \implies$

für virtuelle Verrückungen δx_j mit $\delta x_j(t_1) = \delta x_j(t_2) = 0$

also auch für

$$\delta x_j(t) = \delta x_j \cdot h(t)$$

mit

$h(t)$ beliebig (aber $h(t_1) = h(t_2) = 0$)

$\Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} + \sum_s a_{sj} \lambda_s \right) = 0$$

Aufteilung der Summe:

$$j = \underbrace{1, \dots, 3N-K}, \underbrace{3N-K+1, \dots, 3N}$$

verbleibende $3N-K = f$ Verrückungen können als unabhängig gesehen werden

K Summanden $= 0$ durch Wahl der K Lagrange-Parameter λ_s

also: $(\dots) = 0 \quad \forall j$

d.h.

$\delta S = 0$ für mit den differentiellen ZB kompatiblen Variationen der Bahn

$\Rightarrow$

5) Pfadintegral und Quantenmechanik

QM: Konzept der Teilchenbahn sinnlos:
Ort und Impuls nicht gleichzeitig scharf messbar
$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar$

statt dessen gilt: $(N=1)$
Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen bei $(\vec{r}_2, t_2)$ zu finden, falls es bei $(\vec{r}_1, t_1)$ war

$$|\mathcal{U}(\vec{r}_2, t_2, \vec{r}_1, t_1)|^2$$

7 Hamilton-Formalismus

7.1 Kanonische Gleichungen

konservatives N-Teilchen-System, holonome ZB

$$L(q, \dot{q}, t) = T - U$$

generalisierter Impuls

aufösen nach $\dot{q}_n$ liefert

Def: Hamilton-Funktion

Bsp: freies Teilchen, ebene Bewegung, Polarkoordinaten

$$L(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2\right)$$

also: $p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = \frac{1}{m} p_\rho$

$\qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{m\rho^2} p_\varphi$

$$H(\rho, \varphi, p_\rho, p_\varphi) = p_\rho \cdot \frac{1}{m} p_\rho + p_\varphi \cdot \frac{1}{m\rho^2} p_\varphi$$

$$- \frac{m}{2}\left(\frac{p_\rho^2}{m^2} + \rho^2 \frac{p_\varphi^2}{m^2 \rho^4}\right) = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2}$$

partielle Ableitungen von $H(q,p,t)$:

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen
(kanonische Gleichungen)

$2f$ DGL's 1. Ordnung bestimmen mit

$2f$ Anfangsbedingungen

$$q_n(t_0) = q_{n0} \qquad p_n(t_0) = p_{n0}$$

die Dynamik des Systems, d.h.

$$q(t) \text{ und } p(t)$$

(q,p) ist ein Punkt des $2f$-dimensionalen

Phasenraums $\qquad \pi = (q,p)$ heißt Phase

Vorteile gegenüber Lagrange-Formalismus:

1) Symmetrie der Gleichungen
   q, p gleichberechtigt
   große Klasse an Symmetrietransformationen

2) H hat direkte phys. Bedeutung (L nicht)

   falls a) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

   b) $x_j = x_j(q, \cancel{t})$ $\qquad$ skleronome ZB mit t-unabh. Trsf.formeln

a) $$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

es folgt

b) $x_j = x_j(q)$ t-unabhängig

es folgt

$$T = \sum_j \frac{m_j}{2} \dot{x}_j^2 = \sum_{mn} \frac{1}{2} a_{mn}(q)\, \dot{q}_m \dot{q}_n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \sum_n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n = T$$

$$\Rightarrow \quad \sum_n p_n \dot{q}_n = 2T$$ (siehe auch oben)

also

$$H = \sum_n p_n \dot{q}_n - L = 2T - (T - U) = T + U$$

$H(q,p) = E = \text{const}$ Gesamtenergie