6 Hamilton-Prinzip

mathematische Vorbereitung

6.1 Variationsrechnung

einfaches Problem:

kürzeste Verbindung zwischen (x_1, y_1) und (x_2, y_2)?

I ist ein <u>Funktional</u> von $y(x)$

$$y(x) \in D = \{ y(x) \mid \text{„}y \text{ glatt"}, \ y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2 \}$$

$$y(x) \longmapsto I[y(x)] \in \mathbb{R}$$

Problem:

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; L(y'(x)) \overset{!}{=} \min$$

allgemeiner:

notwendig, da $I[\cdot\cdot] \in \mathbb{R}$

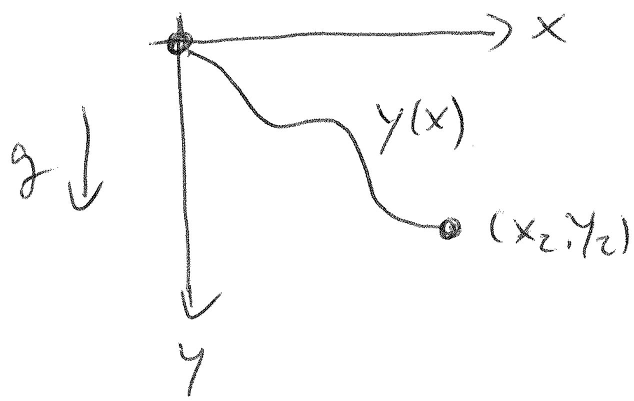
$$I[y(x)] = \overbrace{\int dx}\; \underbrace{L(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots)} \overset{!}{=} \text{extr.}$$

(bel.) Funktion <u>lokaler</u> Kurveneigenschaften

Funktion<u>al</u> der gesamten Kurveneigenschaften

<u>Bsp:</u> Brachystochronenproblem

Masse gleitet auf Draht, $y = y(x)$, von $(x_1, y_1) = 0$ nach (x_2, y_2) im Schwerefeld, Anfangsgeschw. $= 0$



noch allgemeiner (z.B. Optimierung von Flächen)

$$I[y(x_1, x_2, ..)] = \int dx_1 \int dx_2 .. L\left(x_1, x_2, .., y(x_1, x_2 ..), \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, ..\right)$$

oder (s.u.)

$$I[y_1(x), y_2(x), ..] = \int dx\, L(x, y_1(x), y_2(x), .., y_1'(x), y_2'(x), ..)$$

---

hier zunächst

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, L(x, y(x), y'(x)) \overset{!}{=} \min$$

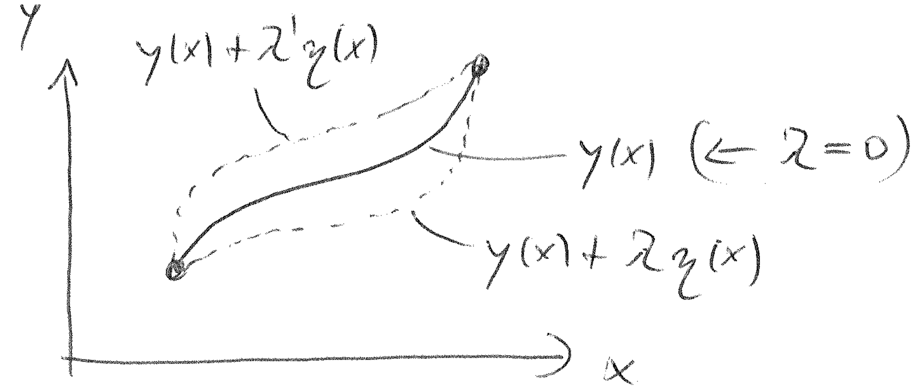
mit $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ $\rightarrow$ Def. bereich D

sei $y(x)$ die Lösung, dann ist

und $\eta(x)$ mit $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ beliebig

$I(\lambda) := I[y(x) + \lambda \eta(x)]$ ist eine Funktion

stationär: min, max, Wendepunkt



es gilt

Bsp: $I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'(x)^2}$

$L(x, y, y') = L(y') = \sqrt{1 + y'^2}$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, es bleibt $\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = 0$

$\Rightarrow \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = \text{const} \Rightarrow y'(x) = \text{const}$

$\Rightarrow y(x) = ax + b$

a, b werden durch die 2 Randbedingungen

$y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ festgelegt

Fazit: $I[y]$ stationär $\Leftrightarrow$ Euler-Gleichung

kompaktere Herleitung?

$$y(x) + \lambda\eta(x) = y(x) + \frac{d}{d\lambda}\left(y(x)+\lambda\eta(x)\right)\Big|_{\lambda=0}\cdot\lambda + \cdots$$

$$= y(x) + \eta(x)\,d\lambda + \cdots$$

Variation der Bahn: $\delta y(x) = \eta(x)\,d\lambda$

(infinitesimal, 1. Ordnung, glatt, Funktion von x, $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$)

Variation des Funktionals: δI

$$I[y] = I[y]\Big|_{\lambda=0} + \underbrace{\frac{d}{d\lambda}I[y]\cdot d\lambda}_{\delta I} + \cdots$$

also gilt

$$I[y(x)] \text{ stationär} \Leftrightarrow \delta I[y(x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = \delta\int_{x_1}^{x_2} dx\, L(x,y,y')$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx\, \delta L(x,y,y')$$

$$= \int dx\left(\frac{\partial L}{\partial y}\cdot\delta y + \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y'\right)$$

$\delta y'(x) = ?$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \int dx \left(\frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y \right)$$

- allgemeinere Variationsprobleme folgen gleichem Schema
- Minimum, Maximum? $\rightarrow$ 2. Ableitung berechnen

6.2 Prinzip der stationären Wirkung

Postulat: (ersetzt N II bzw. d'Alembertsches Prinzip)

gegeben: konservatives System, N Teilchen
K holonome ZB $f_s(x_1, .., x_{3N}, t) = 0 \quad s = 1, .., K$
d.h. $x_j = x_j(q, t)$ mit $q = (q_1, .., q_f)$, $f = 3N - K$
unabhängige generalisierte Koordinaten

Die Bahn im Konfigurationsraum

$$q(t) = (q_1(t), .., q_f(t))$$

wird bestimmt durch

1) 2f Anfangsbedingungen

oder

2f Randbedingungen

und

2) Stationarität des Wirkungsfunktionals:

"Prinzip der stationären Wirkung", "Hamilton-Prinzip" hier erst

Wirkung = Energie × Zeit

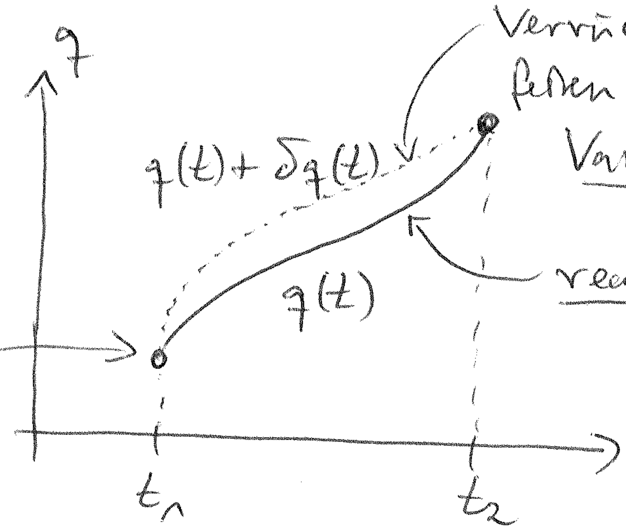
$$S[q(t)] := \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

$$D = \{ q(t) \mid q(t_1) = q_1,\ q(t_2) = q_2,\ q(t) \text{ „glatt"} \}$$

<u>Wirkungsfunktional</u>

infinitesimale, virtuelle Verrückung $\delta q(t)$ zu jeder festen Zeit t mit $\delta q(t)$ glatt

<u>Variation der Bahn</u>



Rand-punkte fest!

<u>reale Bahn</u>, S stationär,

$$\delta \int L\, dt = 0$$

$\delta S = 0$: Variationsprinzip (vs. diff. Prinzipien)

Koordinatenunabhängige Formulierung

nicht anschaulich (L und S ohne direkte phys. Bedeutung)

Bezug zu QM, QFT, VT-Theorie

6.3 Anwendungen des Hamilton-Prinzips

1) mechanische Eichtransformationen

L II sind invariant unter

$$L \mapsto L' = L + \frac{d}{dt}\Lambda(q,t)$$

Beweis: (mit Hamilton-Prinzip)

L II $\quad \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta S[q(t)] = 0$

L II' $\quad \frac{\partial L'}{\partial q_n} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta S'[q(t)] = 0$