Erweiterung des Noether-Theorems:

$T(\alpha)$ mit $q_n = q_n(q', t, \alpha)$ heißt
<u>Symmetrietransformation</u>, falls

für eine beliebige Funktion $\Lambda = \Lambda(q', t, \alpha)$

jetzt gilt:

Bsp: Teilchen im homogenen und statischen elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 = \text{const}$

$$\vec{F} = q\,\vec{E}_0 = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(q\,\vec{E}_0\vec{r}\right) \qquad V(\vec{r}) = -q\,\vec{E}_0\vec{r}$$

somit

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + q\,\vec{E}_0\vec{r}$$

betrachte Translation

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0$$

es gilt

$$L'(\vec{r}\,',\dot{\vec{r}}\,',\vec{r}_0) = L(\vec{r}\,'+\vec{r}_0,\dot{\vec{r}}\,')$$

$$= \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}\,'^2 + q\,\vec{E}_0(\vec{r}\,'+\vec{r}_0)$$

$$= L(\vec{r}\,',\dot{\vec{r}}\,') + q\,\vec{E}_0\vec{r}_0 \qquad (L \text{ nicht inv.!})$$

$$= L(\vec{r}\,',\dot{\vec{r}}\,') + \frac{d}{dt}\underbrace{\left(q\,\vec{E}_0\vec{r}_0\,t\right)}_{\Lambda(\cancel{\vec{r}\,'},t,\vec{r}_0)}$$

Translation ist Symmetrietransformation!

also 3 Erhaltungsgrößen:

$$\text{const} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_{0j}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_{0j}}\bigg|_{x_{0j}=0} \qquad \forall j = 1,2,3$$

$$= m\dot{\vec{r}}\cdot\vec{e}_j - q\,\vec{E}_0\vec{e}_j\,t$$

d.h. $m\dot{\vec{r}} - q\,\vec{E}_0 t = \text{const}$

nur noch DGL 1. Ordnung!

5.2 Symmetrieprinzipien

fundamentale Erfahrungstatsachen:

Der Raum ist homogen und isotrop

Die Zeit ist homogen

Äquivalenz gegeneinander bewegter Inertialsysteme

$\Downarrow$ (für isolierte Systeme)

Bewegungsgleichungen (L II) sind forminvariant unter Galilei-Transformationen

$\Updownarrow$ (L II bzgl. $L(x, \dot{x}, t) \Leftrightarrow$ L II bzgl. $L'(x', \dot{x}', t)$)

Galilei-Transformationen sind mechanische Eichtransformationen

$$\left(L'(x', \dot{x}', t) = L(x(x', t), \dot{x}(x', \dot{x}', t), t) + \frac{d}{dt} \Lambda(x', t) \right)$$

$\Updownarrow$

Beweis $\Uparrow$: s.o.
Beweis $\Downarrow$: s.u., Ham.-Prinzip

Galilei-Transformationen sind Symmetrietransformationen

(Sym.-Tr. sind Punkt-Tr., mech. Eich-Tr. sind allgemeiner

$\Downarrow$ (Noether-Theorem)

Erhaltungsgrößen

Galilei-Transformationen sind kont. Transformationen

10-parametrige Lie-Gruppe

10 Erhaltungsgrößen

betrachte isoliertes N-Teilchen-System

$$L(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N,\dot{\vec{r}}_1,\dots,\dot{\vec{r}}_N,\cancel{t}) = \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2} - \frac{1}{2}\sum_{ij}{}' V(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|)$$

Galilei-Transformation

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(\vec{r}_1{}',\dots,\vec{r}_N{}',t,\alpha) = \vec{r}_i(\vec{r}_j{}',t,\alpha)$$

10 Parameter

damit

$$L'(\vec{r}_1{}',\dots,\vec{r}_N{}',\dot{\vec{r}}_1{}',\dots,\dot{\vec{r}}_N{}',t,\cancel{\alpha})$$

und (Galileisches Relativitätsprinzip)

$$L'(\vec{r}_i{}',\dot{\vec{r}}_i{}',t,\alpha) = L(\vec{r}_i{}',\dot{\vec{r}}_i{}') + \frac{d}{dt}\Lambda(\vec{r}_i{}',t,\alpha)$$

---

1) Homogenität des Raums

Translation $\quad \vec{r}_i = \vec{r}_i{}' + \vec{r}_0 \qquad i=1,\dots,N$

oder $\quad x_{il} = x_{il}' + x_{0l} \qquad i=1,\dots,N \quad l=1,2,3$

L offensichtlich invariant unter Translationen

Noether:

$$\text{const} = \sum_{il}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{il}}\frac{\partial x_{il}}{\partial x_{0l'}} = \sum_{i,l} m_i\dot{x}_{il}\cdot\delta_{ll'} = \sum_i m_i\dot{x}_{il'}$$

oder $\quad \sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i = \text{const}$

$$\boxed{\text{Gesamtimpuls } \vec{P} = \text{const}}$$

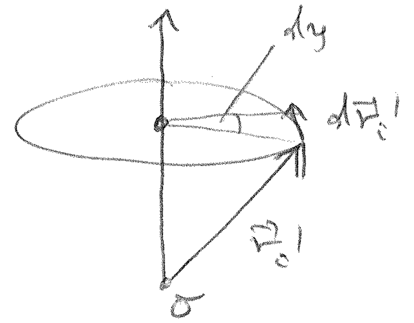
(für isolierte Systeme)

2) Isotropie des Raums

Drehung $\vec{r}_i = \underline{D}^T \vec{r}_i{}'$ $\quad (\vec{r}_i{}' = \underline{D}\cdot\vec{r}_i)$

bzw. (Lie-Gruppe) infinitesimale Drehung

Winkel $d\varphi$, Achse $d\vec{\varphi}/|d\vec{\varphi}|$)



$$\vec{r}_i = \vec{r}_i{}' + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i{}'$$

oder

$$x_{il} = x'_{il} + \sum_{mn} \varepsilon_{lmn}\, d\varphi_m\, x'_{in}$$

$l, m, n = 1, 2, 3$

ε_{lmn} total antisymm.

L offensichtlich invariant unter Drehungen

Noether:

$$\text{const} = \sum_{i,l} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{il}} \frac{\partial x_{il}}{\partial \varphi_m}\bigg|_{d\vec{\varphi}=0} = \sum_{i,l} p_{il} \sum_n \varepsilon_{lmn}\, x_{in}\bigg|_{d\vec{\varphi}=0}$$

$$= \sum_{iln} \varepsilon_{mnl}\, x_{in}\, p_{il} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)_m = L_m \quad \forall m$$

$$\boxed{\text{Gesamtdrehimpuls } \vec{L} = \text{const}}$$

Bem: gültig für beliebige Wahl des Ursprungs!

also folgt

$$\text{const} = \vec{L}' = \sum_i m_i (\vec{r}_i + \vec{r}_0) \times (\dot{\vec{r}}_i + \cancel{\dot{\vec{r}}_0})$$

$$= \vec{L} + \vec{r}_0 \times \vec{P} \quad \forall \vec{r}_0$$

d.h. $\vec{P} = \text{const}$ (s.o.)

3) Äquivalenz gegeneinander bewegter IS

spezielle Galilei-Transformation

oder:

es gilt

Symmetrietransformation!

Noether:

$\Rightarrow$

geradlinig gleichförmige Bewegung des Schwerpunkts: $\boxed{\vec{R} = (\vec{P}/M)\, t + \text{const}}$

4) Homogenität der Zeit

Zeittranslation

$$t = t' + t_0$$

L offensichtlich invariant

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_n p_n \dot{q}_n - L = \text{const}$$

(direkt, ohne Noether)

System ohne ZB, konservativ; also gilt weiter

$$\boxed{\text{Gesamtenergie} \quad E = T + U = \text{const}}$$