

Def: Sei  $\chi = \chi(\vec{r}, t)$  beliebig.

Eine Eichtransformation der Potentiale ist gegeben durch

$$\boxed{\Phi \mapsto \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad \vec{A} \mapsto \vec{A} + \vec{\nabla} \chi}$$

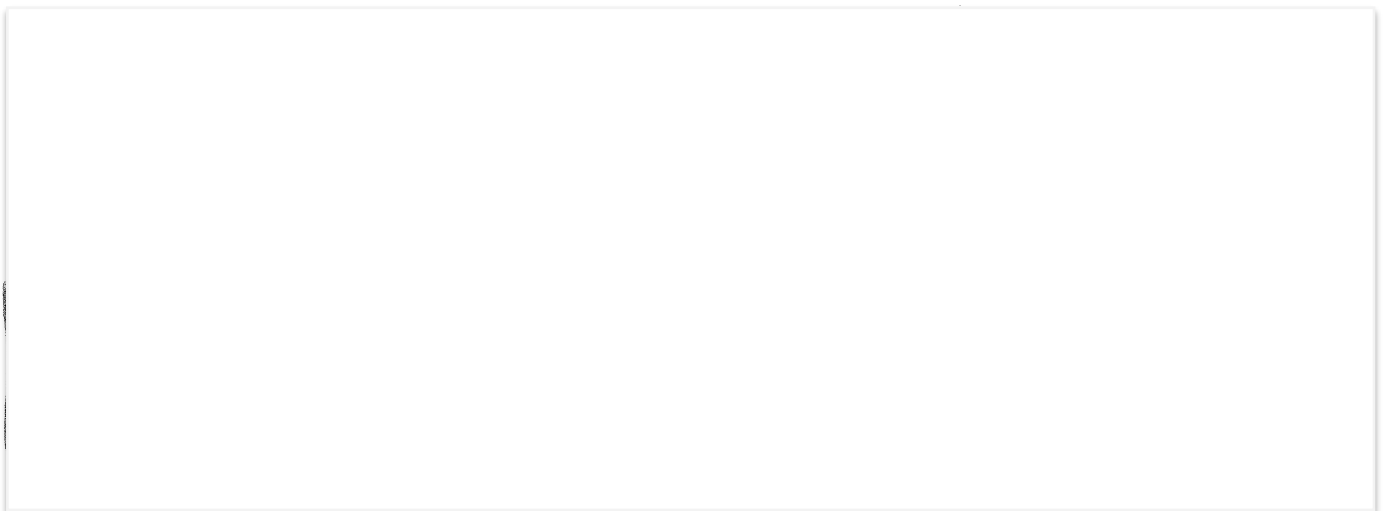
Ein Eichtransformation lässt die Observablen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  invariant!

denn:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\mapsto -\vec{\nabla} (\Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{\nabla} \chi)) \\ &= -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} + \vec{\nabla} \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \chi = \vec{E} \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\mapsto \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B})$$

aber:  $L$  ist nicht eichinvariant



$L$  und  $L'$  liefern dieselben  $LII$ -Gleichungen, denn  $LII \Leftrightarrow NII$  und  $\vec{F} = \gamma \vec{E} + \gamma \vec{v} \times \vec{B}$  ist (wie  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ ) invariant!

genz allgemein gilt für jedes System  
(auch  $N > 1$ ,  $K > 0$ )

Beweis:

## 5 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Bsp: konservative Zentralkraft,  $N=1$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

$$\varphi \text{ zyklisch} \Rightarrow p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = L_z = \text{const}$$

aber: auch  $L_x, L_y = \text{const}$  (Wahl der  $z$ -Achse  
war frei)

Kartesische Koordinaten:

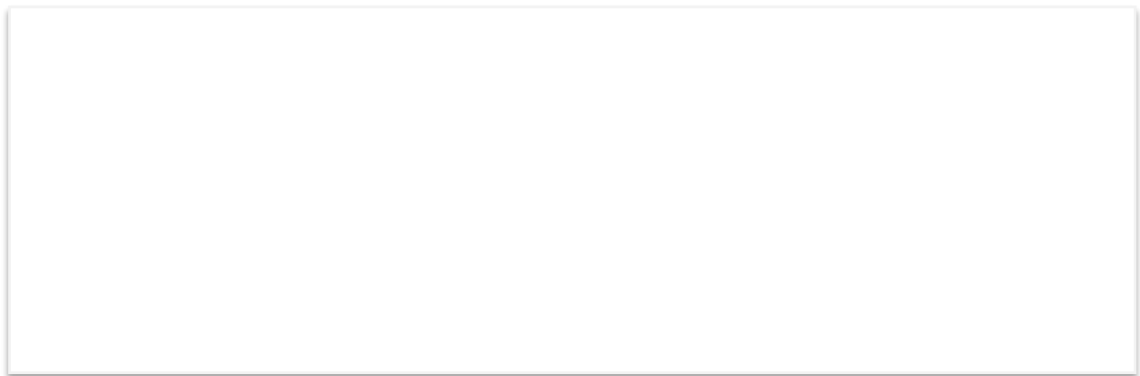
$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(r)$$

keine Koordinate zyklisch

aber:  $\vec{L} = \text{const}$

### 5.1 Noether - Theorem

E. Noether (qualitativ):



Bsp.: Invarianz von  $L$  unter Drehungen  
(3-parametrische kontinuierliche Transformationsgruppe)  
 $\rightarrow \vec{L} = \text{const}$  (3 Erhaltungsgrößen)

Diskussion:

- Problem: Wie findet man die  
Erhaltungsgrößen?  
( $\rightarrow$  Noether-Theorem)

- Invarianz unter Transformation = Symmetrie  
Noether:

kontinuierliche Symmetrien  $\rightarrow$  Erhaltungsgrößen  
(von  $L$ )

- Symmetrien von  $L$   $\leftarrow$  "a priori"  
 $\uparrow$   
Charakter eines  
speziellen Problems  
(Bsp. kons. Zentralkraft)  
(besser: empirische  
aber grundlegende  
Tatsachen)  
Symmetrieprinzipien  
(Bsp.: Homogenität  
des Raums)

S. 2.

- Symmetrien / Erhaltungsgrößen bekannt  
 $\rightarrow$  starke Einschränkungen für die Form von  $L$ !

betrachte konservatives System (kon. System mit  
generalisiertem Potential  $\mathcal{U}(q, \dot{q}, t)$ ) mit holonomem ZB

$$L = L(q, \dot{q}, t) \quad q = (q_1, \dots, q_f)$$

gegeben sei

Punkttransformation  $T(\alpha) : q \mapsto q'$

mit kontinuierlichem Parameter  $\alpha$  und

Bsp: Drehung um z-Achse

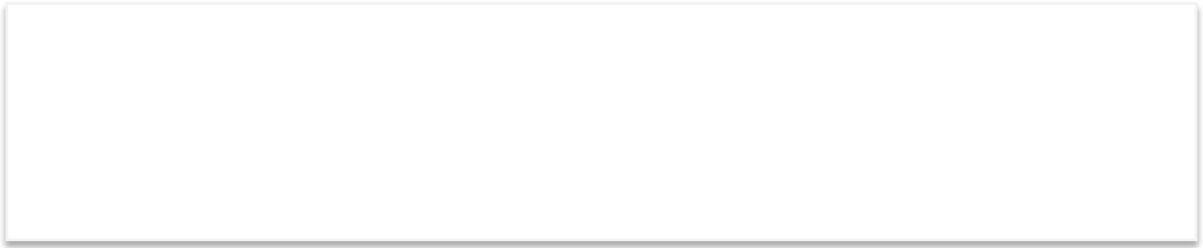
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{r}'$$

also:  $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}', \alpha, y)$  (Parameter  $y$   
und  $\vec{r}(\vec{r}', \alpha, y=0) = \vec{r}'$  kontinuierlich)

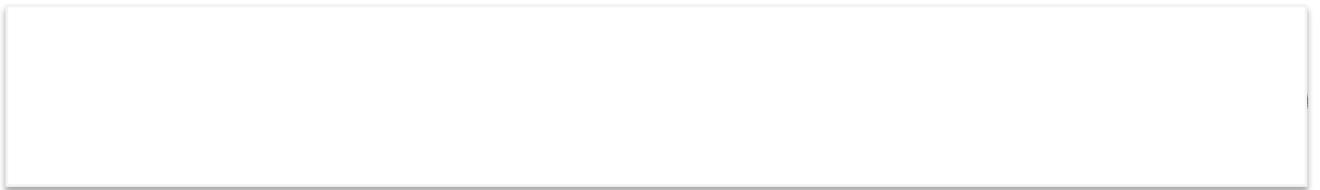
oft: Transformationsgruppe mit kont. Parameter  
d.h. Lie-Gruppe  $\rightarrow$  infinitesimale  
Transformation ausreichend

Noether: Invarianz von  $L$  unter infinites. Transf.  
liefert Erhaltungsgröße

wie z.B.: infinitesimale Drehung um Winkel  $d\varphi$



infinitesimale Drehung (Betrag  $d\varphi = |d\vec{\varphi}|$ ,  
Richtung der Drehachse:  $d\vec{\varphi}/|d\vec{\varphi}|$ ):



Bsp: Translation

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0$$

3 kontinuierliche Parameter:  $x_0, y_0, z_0$

Bsp: Punktspiegelung

$$\vec{r} = -\vec{r}'$$

nicht kontinuierlich!

Bsp: Permutation der Koordinatenachsen

$$x_j = x_{j-1} \quad j=2, \dots, 3N$$

$$x_1 = x_{3N}$$

nicht kontinuierlich!

→ keine Erhaltungsgröße (nach Noether)

beachte:

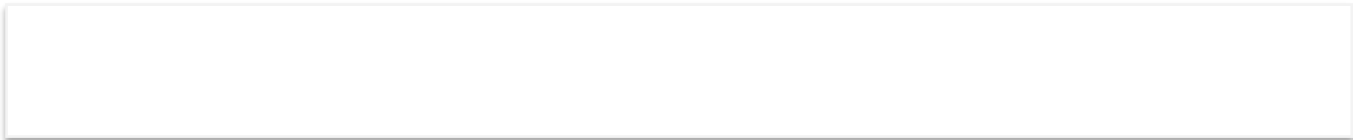
$$q_n = q_n(q', t, \alpha) \quad \text{mit} \quad q_n(q', t, \alpha=0) = q_n'$$

implizit:



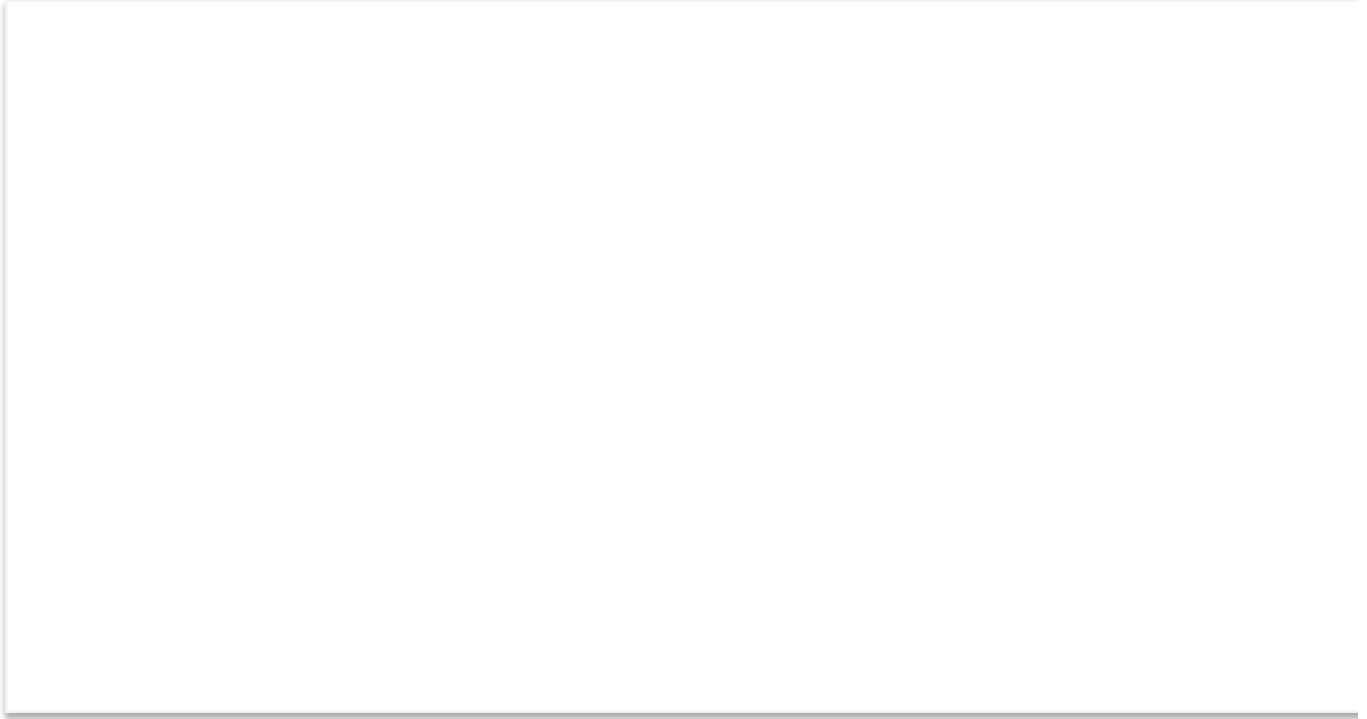
---

Lagrange-Funktion in neuen Koordinaten

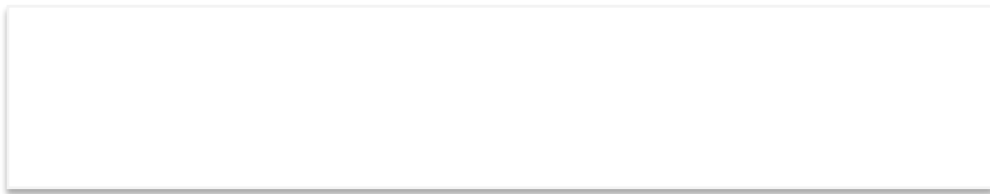


unterschiedliche funktionale Abhängigkeiten  
(wir korrektweise mit unterschiedlichen  
Symbolen bezeichnen)

$L(q, \dot{q}, t)$  ist invariant unter  $T(\alpha) \forall \alpha$ , falls



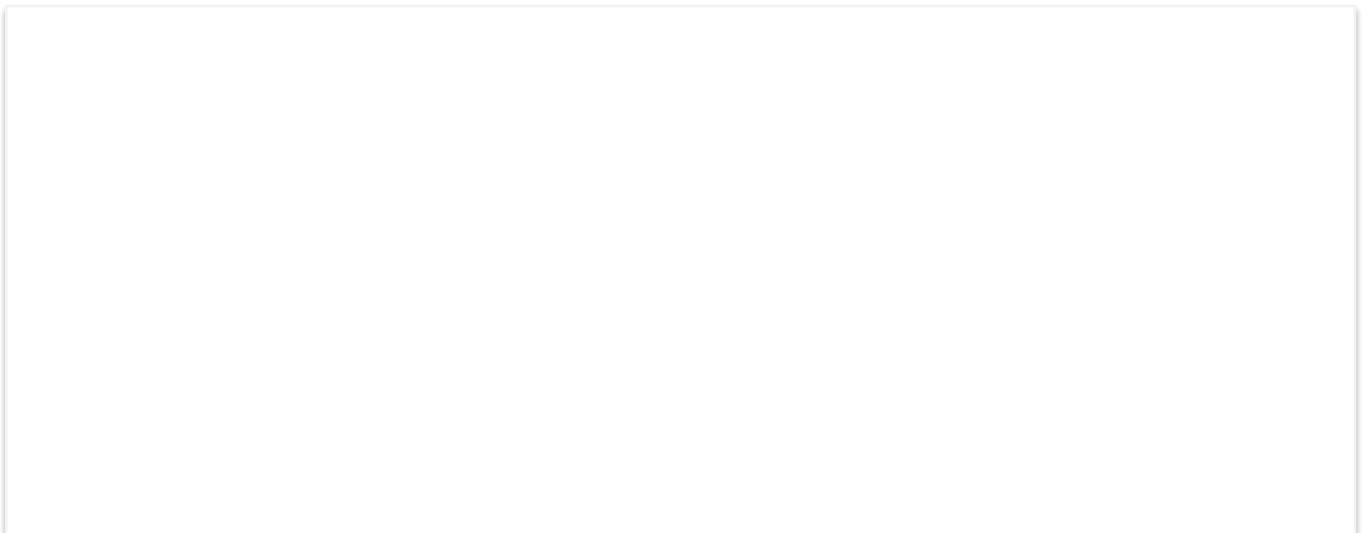
Konsequenz der Invarianz?  
es gilt (insbesondere)



(\*)

- Lie-Gruppen: Invarianz bei  $\alpha=0$  liefert bereits  
sämtliche Informationen

Umformulierung von (\*) als Erhaltungssatz:





Bsp: Zentralkraft,  $L$  in kartesischen Koordinaten

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(r) = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \underline{D}_y \vec{r}' = \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x' \cos y - y' \sin y \\ x' \sin y + y' \cos y \\ z' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$L$  ist invariant unter Drehungen um  $z$ -Achse:

$$L'(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', y) = L(\underline{D}_y \vec{r}', \underline{D}_y \dot{\vec{r}}') = L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}')$$

↑  
offensichtlich

also eine Erhaltungsgröße:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \Big|_{y=0} = m \dot{\vec{r}} \cdot \begin{pmatrix} -x' \sin y - y' \cos y \\ x' \cos y - y' \sin y \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{y=0}$$

$$= m \dot{\vec{r}} \begin{pmatrix} -y' \\ x' \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{y=0} = m \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= m (x \dot{y} - y \dot{x}) = m (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})_z = L_z = \text{const}$$

---

Bsp:  $q_n$  zyklisch in  $L(q, \dot{q}, t)$

