Def: Sei $\chi = \chi(\vec{r}, t)$ beliebig.

Eine Eichtransformation der Potentiale ist gegeben durch

$$\boxed{\Phi \mapsto \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \qquad \vec{A} \mapsto \vec{A} + \vec{\nabla}\chi}$$

Eine Eichtransformation lässt die Observablen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ invariant!

denn:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \mapsto -\vec{\nabla}\left(\Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \vec{\nabla}\chi\right)$$

$$= -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + \vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\chi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\chi = \vec{E}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \mapsto \vec{\nabla} \times \left(\vec{A} + \vec{\nabla}\chi\right) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

aber: L ist nicht eichinvariant

L und L' liefern dieselben LII-Gleichungen,
denn LII $\Leftrightarrow$ NII und $\vec{F} = q\vec{E} + q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$ ist
(wie $\vec{E}$ und $\vec{B}$) invariant!

ganz allgemein gilt für jedes System
(auch $N > 1$, $K > 0$)

Beweis:

5 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

<u>Bsp:</u> konservative Zentralkraft, $N=1$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, \dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

φ zyklisch $\Rightarrow$ $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \ell_z = \text{const}$

<u>aber:</u> auch $\ell_x, \ell_y = \text{const}$ (Wahl der z-Achse war frei)

Kartesische Koordinaten:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(r)$$

keine Koordinate zyklisch

<u>aber:</u> $\vec{\ell} = \text{const}$

5.1 Noether-Theorem

E. Noether (qualitativ):

Bsp.: Invarianz von L unter Drehungen
(3-parametrige kontinuierliche Trsf.gruppe)
$\rightarrow \vec{l} = \text{const}$ (3 Erhaltungsgrößen)

Diskussion:

- Problem: Wie findet man die Erhaltungsgrößen?
  ($\rightarrow$ Noether-Theorem)

- Invarianz unter Transformation = Symmetrie
  Noether:
  kontinuierliche Symmetrien $\rightarrow$ Erhaltungsgrößen
  (von L)

- Symmetrien von L $\leftarrow$ "a priori"
  (besser: empirische aber grundlegende Tatsachen)
  Symmetrieprinzipien
  (Bsp.: Homogenität des Raums)
  s.u.

  $\uparrow$
  Charakter eines speziellen Problems
  (Bsp. kons. Zentralkraft)

- Symmetrien / Erhaltungsgrößen bekannt
  $\rightarrow$ starke Einschränkungen für die Form von L!

betrachte konservatives System (bzw. System mit generalisiertem Potential $U(q, \dot{q}, t)$) mit holonomen ZB

$$L = L(q, \dot{q}, t) \qquad q = (q_1, \ldots, q_f)$$

gegeben sei

<u>Punkttransformation</u> $T(\alpha): q \mapsto q'$

mit <u>kontinuierlichem Parameter α</u> und

<u>Bsp:</u> Drehung um z-Achse

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{r}\,'$$

also: $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}\,', \cancel{t}, \varphi)$ (Parameter φ kontinuierlich)

und $\vec{r}(\vec{r}\,', \cancel{t}, \varphi = 0) = \vec{r}\,'$

oft: Transformations<u>gruppe</u> mit kont. Parameter d.h. Lie-Gruppe $\rightarrow$ infinitesimale Transformation ausreichend

Noether: Invarianz von L unter <u>infinites.</u> Transf. liefert Erhaltungsgröße hier z.B.: infinitesimale Drehung um Winkel $d\varphi$

infinitesimale Drehung (Betrag $d\varphi = |d\vec{\varphi}|$, Richtung der Drehachse: $d\vec{\varphi}/|d\vec{\varphi}|$):

Bsp: Translation

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0$$

3 kontinuierliche Parameter: x_0, y_0, z_0

Bsp: Punktspiegelung

$\vec{r} = -\vec{r}\,'$ nicht kontinuierlich!

Bsp: Permutation der Koordinatenachsen

$x_j = x'_{j-1}$ $\quad j = 2, \dots, 3N$

$x_1 = x'_{3N}$ nicht kontinuierlich!

$\rightarrow$ keine Erhaltungsgröße (nach Noether) beachte:

$$q_n = q_n(q', t, \alpha) \quad \text{mit} \quad q_n(q', t, \alpha = 0) = q_n'$$

impliziert:

Lagrange-Funktion in neuen Koordinaten

unterschiedliche funktionale Abhängigkeiten
(hier korrekterweise mit unterschiedlichen
Symbolen bezeichnet)

$L(q, \dot{q}, t)$ ist <u>invariant unter $T(\alpha)$ $\forall \alpha$</u>, falls

Konsequenz der Invarianz?

es gilt (insbesondere)

(*)

- Lie-Gruppen: Invarianz bei $\alpha = 0$ liefert bereits sämtliche Informationen

Umformulierung von (*) als Erhaltungssatz:

Bsp: Zentralkraft, L in kartesischen Koordinaten

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(r) = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

$$\vec{r} = D_\varphi \vec{r}' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \\ x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \\ z' \end{pmatrix}$$

L ist invariant unter Drehungen um z-Achse:

$$L'(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', \varphi) = L(D_\varphi \vec{r}', D_\varphi \dot{\vec{r}}') = L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}')$$

offensichtlich

also eine Erhaltungsgröße:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=0} = m\dot{\vec{r}} \cdot \begin{pmatrix} -x'\sin\varphi - y'\cos\varphi \\ x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{\varphi=0}$$

$$= m\dot{\vec{r}} \begin{pmatrix} -y' \\ x' \\ 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{\varphi=0} = m \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})_z = L_z = \text{const}$$

Bsp: q_n zyklisch in $L(q, \dot{q}, t)$