4.3 Kepler-Problem

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

$\alpha = \gamma m_1 m_2$: Gravitation (Planeten)

$\alpha = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Z_1 Z_2$: Coulomb-WW (H-Atom)

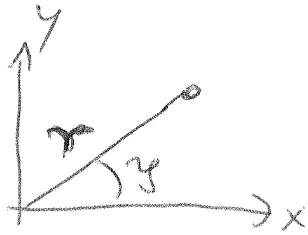
$\alpha > 0$ anziehend

$\alpha < 0$ abstoßend

Bahnkurve:

$$\varphi(r) = \int dr \frac{l_z/r^2}{\sqrt{2mE + 2m\alpha/r - l_z^2/r^2}}$$

es gilt:



$$\cos \arccos x = x$$

$$\Rightarrow -\sin \arccos x \cdot \arccos' x = 1$$

$$\Rightarrow \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

also:

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l_z^2/r^2 + m^2\alpha^2/l_z^2 - 2m\alpha/r}{\sqrt{\dots}^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dots}} \cdot (-1)\frac{l_z}{r^2}$$

$$= \frac{l_z}{r^2} \cdot 1 \Big/ \sqrt{2mE + \cancel{m^2\alpha^2/l_z^2} - l_z^2/r^2 - \cancel{m^2\alpha^2/l_z^2} + 2m\alpha/r}$$

✓

es folgt

$$\cos\vartheta = \frac{l_z/r - m\alpha/l_z}{\sqrt{2mE + m^2\alpha^2/l_z^2}} \quad \Big| \; l_z/m\alpha$$

$$= \Bigg(\underbrace{\frac{l_z^2}{m\alpha}}_{p}\frac{1}{r} - 1\Bigg)\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+2E\frac{l_z^2}{m\alpha^2}}}}_{\varepsilon}$$

Kreis

$$\varepsilon = 0 \Rightarrow \frac{p}{r} = 1 \Rightarrow r = p = \frac{l_z^2}{m\alpha}$$

beachte:

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r = m\ddot{\vec{r}} = -mr\dot{\varphi}^2\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{r^2} = mr\dot{\varphi}^2 \qquad l_z = mr^2\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{r^2} = mr\frac{l_z^2}{m^2r^4} = \frac{l_z^2}{mr^3}$$

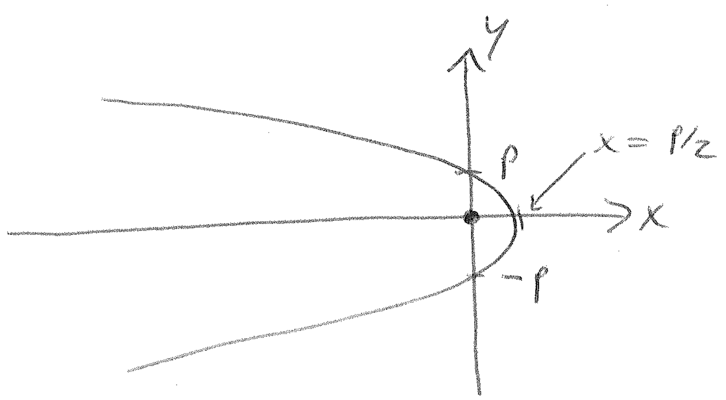
$$\Rightarrow r = \frac{l_z^2}{m\alpha} = p$$

Parabel

$$\varepsilon = 1 \Rightarrow \frac{p}{r} = 1 + \cos\varphi \Rightarrow \frac{p}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{\cdot} + x \Rightarrow (p-x)^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow p^2 - 2px = y^2 \Rightarrow x = \frac{p}{2} - \frac{1}{2p}y^2$$



beachte:

$r = \min,\ \dot{r} = 0$ für $r = p/2$

$$\Rightarrow \quad 0 = E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{\alpha}{r} + \frac{l_z^2}{2mr^2} = -\frac{2\alpha}{p} + \frac{2l_z^2}{mp^2}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{l_z^2}{m\alpha}$$

allgemein gilt (ε beliebig)

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{\alpha}{r} + p\frac{\alpha}{2r^2}$$

für $r = \min = r_0$, $\dot{r} = 0$ ist

$$E = -\frac{\alpha}{r_0} + p\frac{\alpha}{2r_0^2}$$

l_z, p fest $\Rightarrow$ $E = \min$ falls

$$0 = \frac{dE}{dr_0} = \frac{\alpha}{r_0^2} - p\frac{\alpha}{r_0^3} \quad \Leftrightarrow \quad r_0 = p \quad \text{(Kreis)}$$

also $E_{\min} = -\frac{\alpha}{2p}$

und $E > -\frac{\alpha}{2p}$ $\quad 1 + 2E\frac{p}{\alpha} > 0$

<u>Ellipse</u> $(\varepsilon < 0,\ E < 0)$

$$\frac{p}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1 + \varepsilon\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \quad p = \sqrt{\cdots} + \varepsilon x$$

$$\Rightarrow \quad (p - \varepsilon x)^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \quad p^2 + \varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon p x = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \quad (1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 + 2\varepsilon p x - p^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} + 2\varepsilon \frac{p}{1-\varepsilon^2} x - \frac{p^2}{1-\varepsilon^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(x + \varepsilon \frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^2 \underbrace{- \varepsilon^2 \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} - \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}}_{-\frac{\varepsilon^2 p^2 + (1-\varepsilon^2)p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} = -\frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}} + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(x + \varepsilon \frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2} = 1$$

mit $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$ und $b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ ist

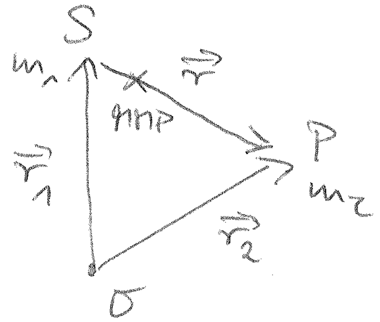
$$\boxed{\frac{(x+\varepsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

1. Keplersches Gesetz

Planetenbahnen: Ellipsen mit Sonne in einem Brennpunkt

$\vec r(t)$ bzw $r(\varphi)$ Ellipse

$\vec r = \vec r_2 - \vec r_1 = \vec r_P - \vec r_S$



Rücktransformation

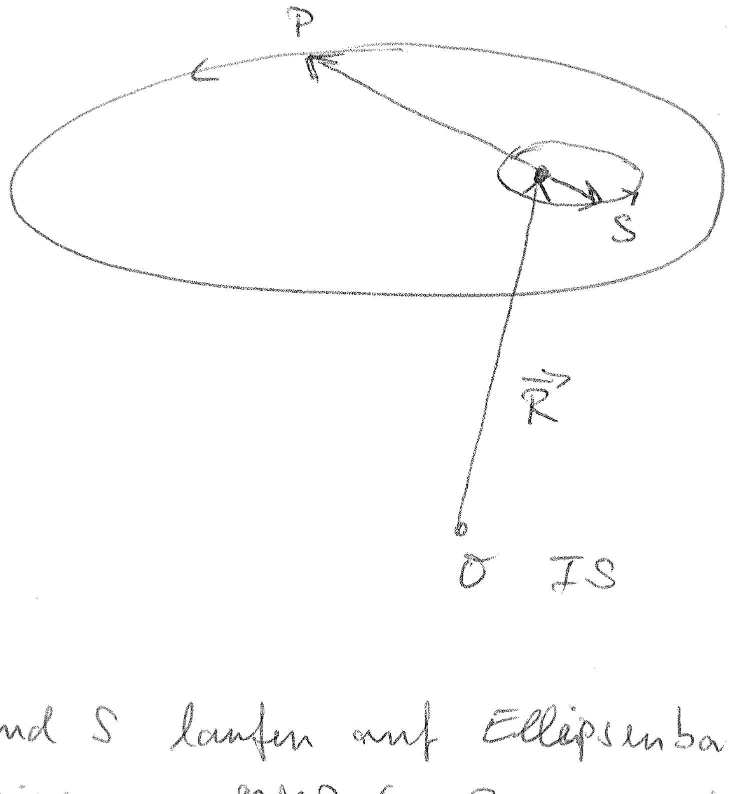
$\vec r_1 = \vec R - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec r \quad (\approx \vec R)$

$m_1 \gg m_2$

$\vec r_2 = \vec R + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec r \quad (\approx \vec R + \vec r)$

$\vec R = \vec R_0 + \frac{1}{M}\vec P_0 \cdot t$ in einem IS

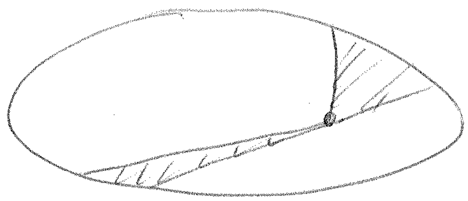
$\vec r_1 = \vec R + \mathrm{const.}\,\vec r$: beschleunigte Bewegung



P und S laufen auf Ellipsenbahnen um gemeinsamen SP (= Brennpunkt)

2. Keplersches Gesetz

Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen



3. Keplersches Gesetz

$T^2 \sim a^3$ T : Umlaufzeit

$$T^2 = \underbrace{\frac{4\pi^2 m}{\alpha}} \cdot a^3$$

$$4\pi^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{\gamma m_1 m_2} = \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{1}{m_1 + m_2} \approx \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{1}{m_1}$$

nahezu unabhängig von m_2, nahezu gleich für alle Planeten

4.4 Beschleunigte Bezugssysteme

N II : nur gültig für Inertialsysteme, kartes. Koor.

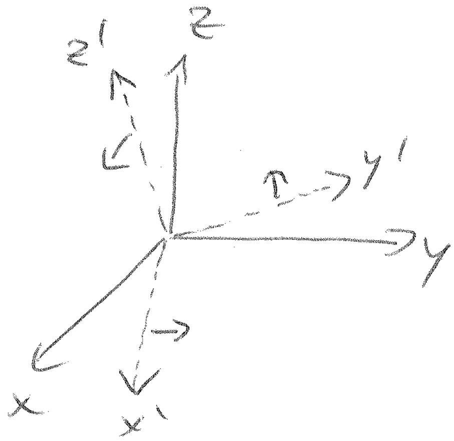
L II $\Leftrightarrow$ N II für Systeme ohne ZB, aber

L II forminvariant unter beliebigen Punkttransform.

z.B. $(N=1)$ $\quad \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{d}(t) \quad$ mit $\ddot{\vec{d}}(t) \neq 0$

$\rightarrow$ einfache Möglichkeit zur Ableitung der Bewegungsgleichungen in Nicht-IS !

Bsp: rotierendes Bezugssystem



IS $\quad x, y, z, t$

BS $\quad x', y', z', t'$

$t' = t$

es gilt $L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$

und

also

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung enthält t explizit

betrachte Situation mit

$\underline{D}(t=0) = \mathbb{1}$ $\qquad$ BS = IS z.Zt. $t=0$

für kleine t

$\underline{D}(t)$ Drehmatrix

also

es sei

dann gilt:

$$\underline{\Omega}\,\vec{r} = \qquad = \begin{pmatrix} \omega_3 y - \omega_2 z \\ -\omega_2 x + \omega_1 z \\ \omega_2 x - \omega_1 y \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \vec{\omega} \times \vec{r}$$

also:

Lagrange-Funktion

für kleine t: approximative Lagrange-Funktion

(Vernachlässigung von Termen der $O(t)$)

keine explizite Zeitabhängigkeit mehr

$\underline{L_{\bar{n}}}$:

also

4.5 Teilchen im elektromagnetischen Feld

Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = q\,\vec{E}(\vec{r},t) + q\cdot\dot{\vec{r}}\times\vec{B}(\vec{r},t)$$

q: Ladung des Massenpunkts

$\vec{E},\vec{B}$: elektrisches / magnetisches Feld

Potenzialdarstellung der Felder:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r},t) - \frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t)$$

also:

$$\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = -q\,\vec{\nabla}\Phi(\vec{r},t) - q\,\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} + q\,\dot{\vec{r}}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t)\right)$$

es gilt

$$\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial U(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)}{\partial\dot{\vec{r}}} - \frac{\partial U(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)}{\partial\vec{r}}$$

mit

Beweis:

also

und nicht

folgt

also ist $m\ddot{\vec r} = \vec F \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}} - \frac{\partial L}{\partial \vec r} = 0$ (LII)

mit

Lagrange-Funktion eines Teilchens (Masse m, Ladung q) im elektromagnetischen Feld

---

generalisierter Impuls:

im statischen Fall, $\vec E = \vec E(\vec r)$, $\vec B = \vec B(\vec r)$ ist $\Phi = \Phi(\vec r)$ und $\vec A = \vec A(\vec r)$ und somit $\partial L / \partial t = 0$

also: