4 Anwendungen des Lagrange-Formalismus

4.1 Krummlinige Koordinaten

LII gelten auch für $K=0$ (keine ZB)

$x_1, \dots, x_{3N}$ als generalisierte Koordinaten

Bsp: $N=1$, konservatives System

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$$

LII $\quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(m \dot{\vec{r}}) + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

---

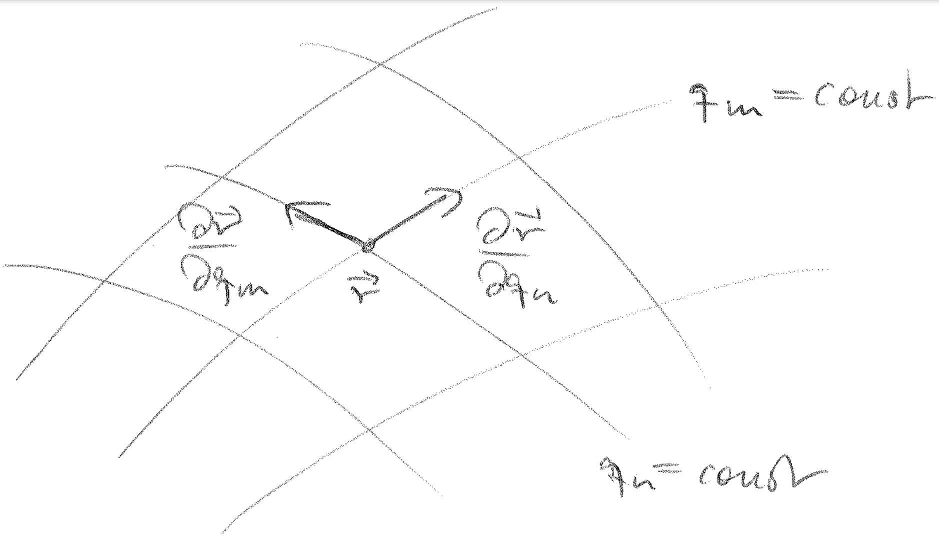
krummlinige Koordinaten $q_1, \dots, q_{3N}$

$$L(q, \dot{q}, t) = L(x(q,t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t)$$

LII-Gleichungen in $q, \dot{q}, t$

Bsp: $N=1$

$$x_j = x_j(q_1, q_2, q_3) \qquad j = 1, 2, 3$$



Krummlinig orthogonale Koordinaten $g_{mn}(q) \propto \delta_{mn}$

es gilt:

$$\dot{\vec r}^2 = \sum_j \left(\frac{dx_j}{dt}\right)^2 = \sum_{mn} g_{mn}(q)\, \dot q_m \dot q_n$$

$$T = T(q, \dot q) = \frac{m}{2} \sum_{mn} g_{mn}(q)\, \dot q_m \dot q_n$$

Bsp: ebene Polarkoordinaten r, φ

$$x = r\cos\varphi \qquad dx = \cos\varphi \, dr - r\sin\varphi \, d\varphi$$
$$y = r\sin\varphi \qquad dy = \sin\varphi \, dr + r\cos\varphi \, d\varphi$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = r\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{orthogonal}$$

$$T = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right)^2 \dot{r}^2 + \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right)^2 \dot{\varphi}^2\right]$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)$$

Bsp: Kugelkoordinaten r, ϑ, φ

$$\vec{r} = \vec{r}(r, \vartheta, \varphi) \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(r, \vartheta, \varphi, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}^2 \Rightarrow$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

4.2 Zwei-Körper-Problem

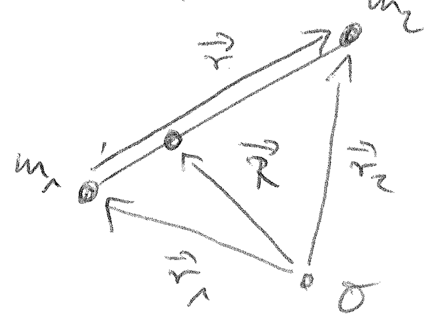
2 Massenpunkte, isoliertes System, konservativ:

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

L II 6 gekoppelte DGL 2. Ordnung

Transformation auf Schwerpunkt- und Relativkoordinaten:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



Umkehrung:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

damit

mit $M = m_1 + m_2$ Gesamtmasse

$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ reduzierte Masse

$$L = L_1(\vec{R}, \dot{\vec{R}}) + L_2(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

"Freiheitsgrade entkoppelt"

Bewegungsgleichungen für $\vec{R}$, $\vec{r}$ unabhängig voneinander

---

$$L_1(\vec{R}, \dot{\vec{R}}) = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2$$

geradlinig, gleichförmige Schwerpunktsbewegung verbleibendes Ein-Körper-Problem

Kugelkoordinaten r, ϑ, φ (s.o.)

<u>LII-Gleichungen</u>

φ

es ist $l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m(r\cos\varphi\sin\vartheta)(r\sin\dot{\varphi}\sin\vartheta)$

$- m(r\sin\varphi\sin\vartheta)(r\cos\dot{\varphi}\sin\vartheta)$

$= m\,r\cos\varphi\sin\vartheta\, r\cos\varphi\,\dot{\varphi}\sin\vartheta$

$+ m\,r\sin\varphi\sin\vartheta\, r\sin\varphi\,\dot{\varphi}\sin\vartheta$

$= m r^2 \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}$

$l_z = \text{const}$

Wahl der z-Achse war frei, also $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const}$

$\Rightarrow$ Bewegung verläuft o.B.d.A. in x-y-Ebene

also $\vartheta = \pi/2 = \text{const}$

$l_z = m r^2 \dot{\varphi}$

ϑ

r

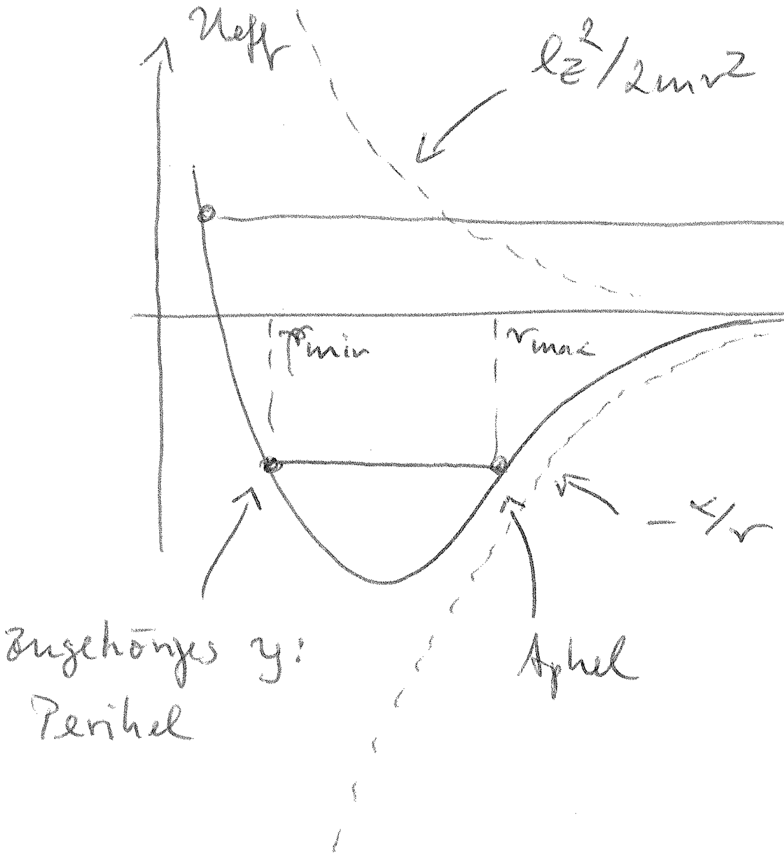
einmal trivial integrierbar!

Diskussion:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r) \quad \text{mit} \quad U_{eff}(r) = U(r) + \frac{l_z^2}{2mr^2}$$

effektives Potential

Bsp: $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$

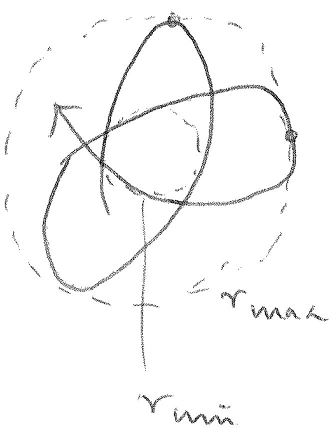


E>0:
Streuung

E<0:
gebundene Bewegung

Bertrands Theorem: geschlossene Bahnen nur für

$$U(r) = -\alpha/r \quad \text{oder} \quad U(r) = \alpha r^2$$



sonst: Periheldrehung

Bestimmung der Bahn:

- Trennung der Variablen

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r) - l_z^2/2mr^2\right)}}$$

- Integration $\rightarrow$ $t = t(r)$
- Auflösen $\rightarrow$ $\boxed{r = r(t)}$
- Einsetzen in $m r^2 \dot{\varphi} = l_z = \text{const}$

$$d\varphi = \frac{l_z}{m r(t)^2}\, dt$$

- Integration $\rightarrow$ $\boxed{\varphi = \varphi(t)}$

Bahnkurve (ohne zeitlichen Ablauf)

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{dr} = \frac{l_z}{mr^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r) - l_z^2/2mr^2\right)}}$$

Integration $\rightarrow$ $\boxed{\varphi = \varphi(r)}$