

### 3.4 Punkttransformationen

Bsp: Massenpunkt auf rotierender Stange  
jetzt: generalisierte Koordinate  $x$

Transformationsformeln

$$x = x$$

$$y = x \tan \omega t$$

es folgt

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} (1 + \tan^2 \omega t) \dot{x}^2$$

$$+ \left[ \dot{x}^2 + 2\omega \tan \omega t \cdot x \dot{x} + \omega^2 (1 + \tan^2 \omega t) x^2 \right]$$

$L''$ :

$$\ddot{x} + 2\omega \tan \omega t \cdot \dot{x} + 2\omega^2 \tan^2 \omega t \cdot x = 0$$

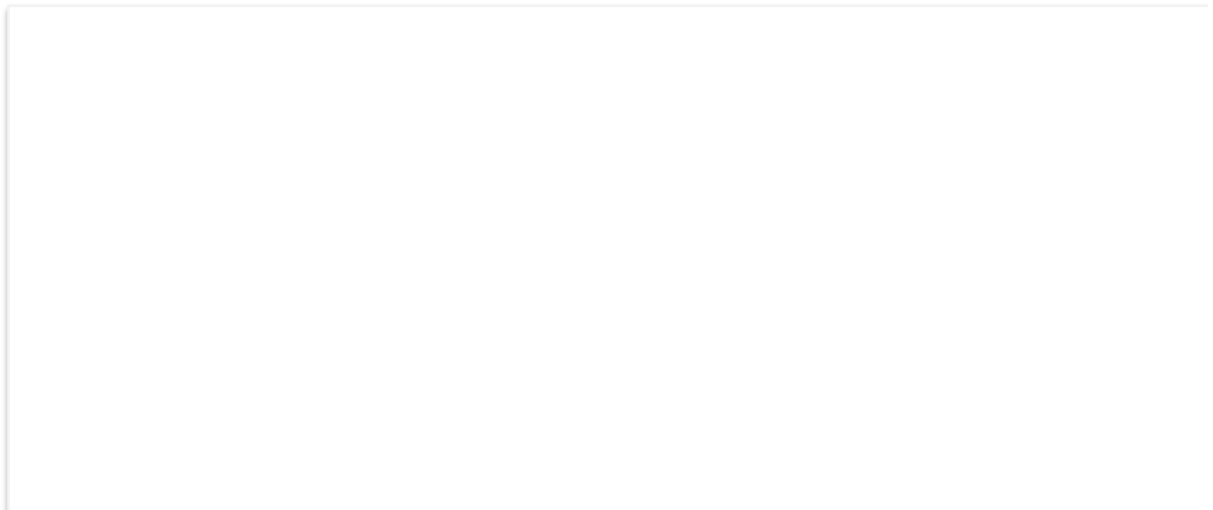
Ansatz:

$$x = \rho \cos \omega t$$

liefert

$$\ddot{\rho} - \omega^2 \rho = 0 \quad \checkmark$$

Fazit:



allgemein: ein Übergang von gen. Koord.  $q_1, \dots, q_f$   
zu  $q'_1, \dots, q'_f$  heißt

Punkttransformation

damit ist auch

neue Transformationsformeln

und

alternativ kann  $\dot{x}(q', \dot{q}', t)$  auch aus  $x(q', t)$   
bestimmt werden

$$\dot{x}(q', \dot{q}', t) = \frac{d}{dt} x(q', t)$$

(Beweis: s.u.)

neue Lagrange - Funktion

$$L = L(q, \dot{q}, t) = L(x(q, t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t)$$

$$= L(x(q', t), \dot{x}(q', \dot{q}', t), t) = L(q', \dot{q}', t)$$

unterschiedliche funktionale Abhängigkeiten!  
(trotzdem gleiches Symbol  $L$ )

die Lagrange - Funktion kann direkt (durch Einsetzen)  
von alten auf neue Koordinaten umgerechnet werden

$$L(q', \dot{q}', t) = L(q(q', t), \dot{q}(q', \dot{q}', t), t)$$

$L\ddot{n}$  - Gleichungen sind formvariant unter Punkttrf.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0$$

gilt unabhängig davon, welcher  
Satz generalisierter Koordinaten  
gewählt wird

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q', \dot{q}', t)}{\partial \dot{q}'_n} - \frac{\partial L(q', \dot{q}', t)}{\partial q'_n} = 0$$

Beweis zu oben:

einerseits gilt

$$\dot{x}_j(q', \dot{q}', t) = \sum_n \frac{\partial x_j(q', t)}{\partial q'_n} \dot{q}'_n + \frac{\partial x_j(q', t)}{\partial t}$$

andererseits gilt

$$\dot{x}_j(q', \dot{q}', t) = \dot{x}_j(q(q', t), \dot{q}(q', \dot{q}', t), t)$$

$$= \sum_m \frac{\partial x_j}{\partial q'_m} \dot{q}'_m + \frac{\partial x_j}{\partial t}$$

$$= \sum_m \frac{\partial x_j}{\partial q'_m}(q(q', t), t) \cdot \left[ \sum_n \frac{\partial q'_m(q', t)}{\partial q'_n} \dot{q}'_n + \frac{\partial q'_m(q', t)}{\partial t} \right]$$

$$+ \frac{\partial x_j}{\partial t}(q(q', t), t)$$

$$= \sum_n \frac{\partial x_j}{\partial q'_n}(q(q', t), t) \dot{q}'_n$$

$$+ \underbrace{\sum_m \frac{\partial x_j}{\partial q'_m}(q(q', t), t) \frac{\partial q'_m(q', t)}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t} x_j(q(q', t), t)} + \frac{\partial x_j}{\partial t}(q(q', t), t)$$

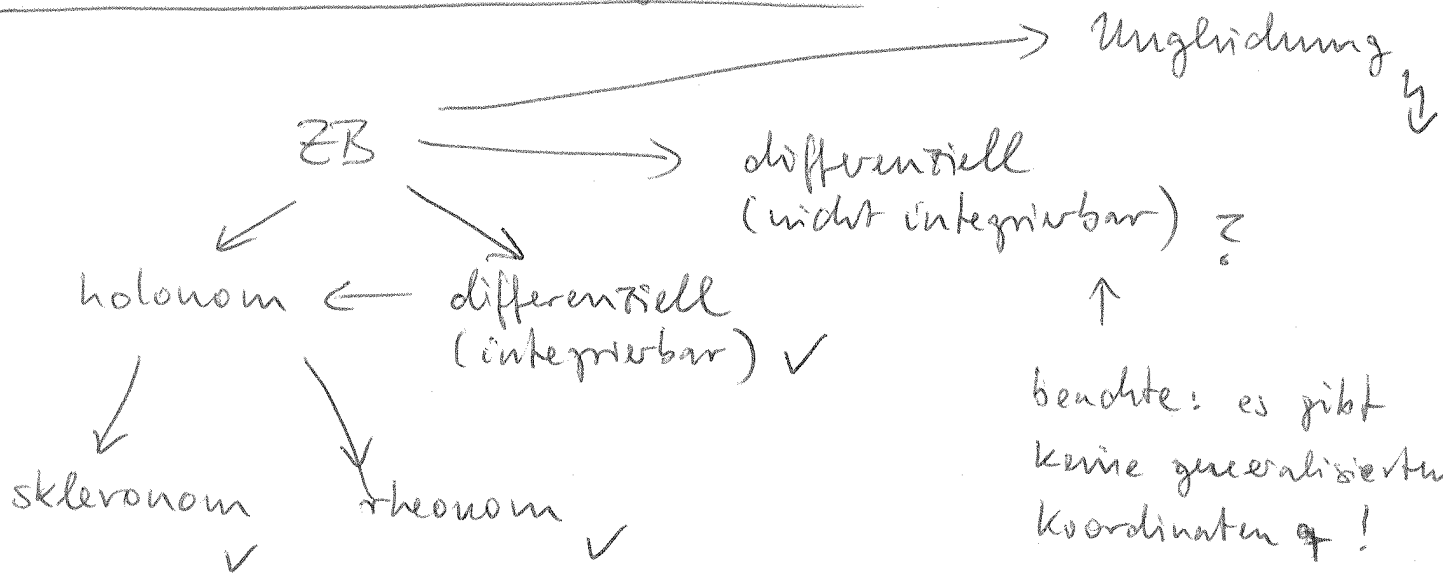
$$\frac{\partial}{\partial t} x_j(q(q', t), t)$$

$$= \sum_n \frac{\partial x_j}{\partial q'_n}(q', t) \dot{q}'_n + \frac{\partial x_j}{\partial t}(q', t)$$

also:

$$\dot{x}_j(q', \dot{q}', t) = \dot{x}_j(q(q', t), \dot{q}(q', \dot{q}', t), t) \quad \text{q.e.d.}$$

### 3.5 Nicht-holonome Systeme



Betrachte System mit  $K$  differenziellen ZB (integrierbar oder nicht):

$s=1, \dots, K$

für virtuelle Verrückungen  $\delta x_j$  (momentan, mit ZB verträglich, sonst beliebig) gilt also

$s=1, \dots, K$  (\*)

ZB werden durch ZK realisiert:

bzw. für konservatives System mit  $L = T - U$ :

$$= \sum_j \frac{m_j}{2} \dot{x}_j^2 - U(x)$$

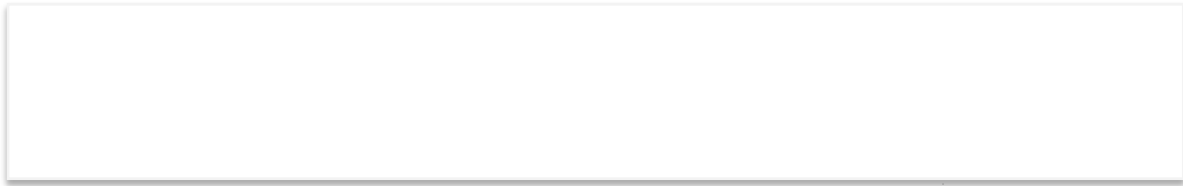
$j=1, \dots, 3N$

Prinzip der virtuellen Arbeit  $\sum_j z_j \delta x_j = 0$ , also



(die  $z_k$  sind damit eliminiert)

beachte: die  $\delta x_j$  sind nicht unabhängig  
mit (\*) folgt



für beliebige  $z_s = z_s(x, \dot{x}, t)$ , Lagrange-Multiplikatoren

Aufteilung der Summe:

$$\sum_{j=1}^{3N} (\dots)_j \delta x_j = \sum_{j=1}^{3N-k} (\dots)_j \delta x_j + \sum_{j=3N-k+1}^{3N} (\dots)_j \delta x_j$$

wähle  $z_s$  ( $s=1, \dots, k$ ) so, dass

↑  
k Terme!

$$(\dots)_j = 0 \quad \text{für } j = 3N-k+1, \dots, 3N$$

↑  
lineares, inhomogenes Gleichungssystem in den  $z_s$   
mit  $x, \dot{x}$ -abhängigen Koeffizienten

es folgt also

$$\sum_{j=1}^{3N-k} (\dots)_j \delta x_j = 0$$

$\delta x_1, \dots, \delta x_{3N-K}$  lassen sich als unabhängig voneinander auffassen, denn es können immer  $\delta x_{3N-K+1}, \dots, \delta x_{3N}$  gefunden werden, so dass (\*\*\*) erfüllt ist!

$$(**) \stackrel{\wedge}{=} (***) : \sum_{j=1}^{3N-K} a_{js} \delta x_j + \sum_{j=3N-K+1}^{3N} a_{js} (\delta x_j) = 0$$

↑  
 $K \times K$  lineares, inhomogenes Gleichungssystem in  $\delta x_j$  für  $j = 3N-K+1, \dots, 3N$

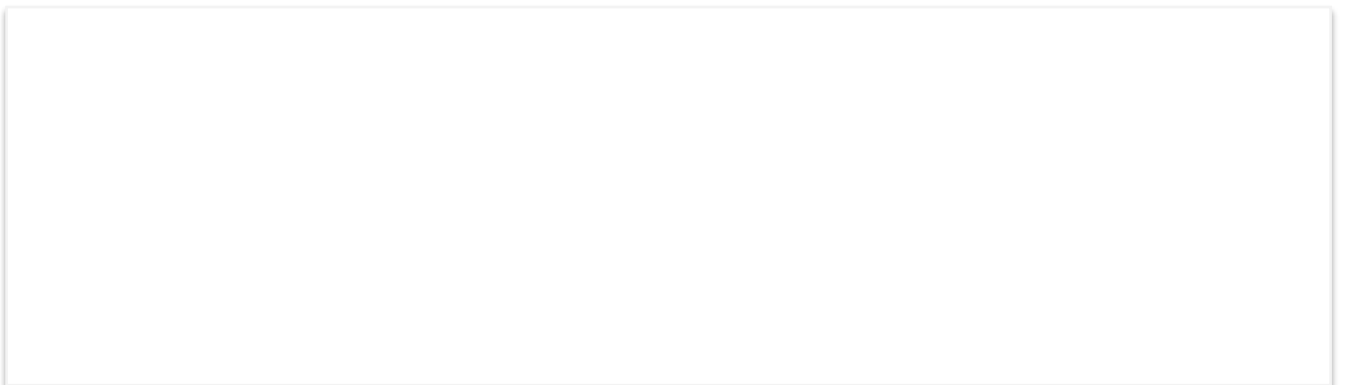
damit gilt (wegen der Unabhängigkeit der  $\delta x_j$  für  $j = 1, \dots, 3N-K$ )

$$(\dots)_j = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, 3N-K$$

sonst gilt (wegen der Wahl der  $\mathcal{R}_s$ )

$$(\dots)_j = 0 \quad \text{für } j = 3N-K+1, \dots, 3N$$

also



$$\text{mit } L = \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 - U(x) \quad \vec{F}_j = - \frac{\partial U}{\partial x_j} \quad \text{ist}$$

$$m_j \ddot{x}_j = \vec{F}_j + \underbrace{\sum_s \lambda_s a_{sj}}_{Z_j}$$

Rechnung kann also auch als alternative Herleitung von LI aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit aufgefasst werden:

falls die ZB integrierbar sind, falls also

folgt

neben den Bewegungsgleichungen sind (zur Festlegung der  $K$  Lagrange-Multiplikatoren) die  $K$  ZB zu berücksichtigen

$$\sum_j a_{sj} dx_j + b_s dt = 0$$

bzw.

$$\sum_j a_{sj} \dot{x}_j + b_s = 0$$