3.4 Punkttransformationen

Bsp: Massenpunkt auf rotierender Stange

jetzt: generalisierte Koordinate x

Transformationsformeln

$$x = x$$

$$y = x \tan \omega t$$

es folgt

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2}\left(1 + \tan^2 \omega t\right) \times$$

$$\times \left[\dot{x}^2 + 2\omega \tan \omega t \cdot x \dot{x} + \omega^2 (1 + \tan^2 \omega t)\, x^2\right]$$

LG:

$$\ddot{x} + 2\omega \tan \omega t \cdot \dot{x} + 2\omega^2 \tan^2 \omega t \cdot x = 0$$

Ansatz:

$$x = \rho \cos \omega t$$

liefert

$$\ddot{\rho} - \omega^2 \rho = 0 \quad \checkmark$$

Fazit:

allgemein: ein Übergang von gen. Koord. $q_1, \dots, q_f$ zu $q'_1, \dots, q'_f$ heißt

<u>Punkttransformation</u>

damit ist auch

neue Transformationsformeln

und

alternativ kann $\dot{x}(q', \dot{q}', t)$ auch aus $x(q', t)$ bestimmt werden

$$\dot{x}(q', \dot{q}', t) = \frac{d}{dt}\, x(q', t)$$

(Beweis: s.u.)

neue Lagrange-Funktion

$$L = L(q, \dot{q}, t) = L(x(q,t), \dot{x}(q,\dot{q},t), t)$$

$$= L(x(q',t), \dot{x}(q',\dot{q}',t), t) = L(q', \dot{q}', t)$$

unterschiedliche funktionale Abhängigkeiten!
(trotzdem gleiches Symbol L)

die Lagrange-Funktion kann direkt (durch Einsetzen) von alten auf neue Koordinaten umgerechnet werden

$$\boxed{L(q', \dot{q}', t) = L(q(q',t), \dot{q}(q',\dot{q}',t), t)}$$

<u>LII-Gleichungen sind forminvariant unter Punkttrf.</u>

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0$$

gilt unabhängig davon, welcher Satz generalisierter Koordinaten gewählt wird

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L(q',\dot{q}',t)}{\partial \dot{q}'_n} - \frac{\partial L(q',\dot{q}',t)}{\partial q'_n} = 0$$

Beweis zu oben:

einerseits gilt

$$\dot{x}_j(q',\dot{q}',t) = \sum_n \frac{\partial x_j(q',t)}{\partial q'_n}\,\dot{q}'_n + \frac{\partial x_j(q',t)}{\partial t}$$

andererseits gilt

$$\dot{x}_j(q',\dot{q}',t) = \dot{x}_j\big(q(q',t),\,\dot{q}(q',\dot{q}',t),\,t\big)$$

$$= \sum_m \frac{\partial x_j}{\partial q_m}\,\dot{q}_m + \frac{\partial x_j}{\partial t}$$

$$= \sum_m \frac{\partial x_j}{\partial q_m}\big(q(q',t),t\big)\cdot\left[\sum_n \frac{\partial q_m(q',t)}{\partial q'_n}\,\dot{q}'_n + \frac{\partial q_m(q',t)}{\partial t}\right] + \frac{\partial x_j}{\partial t}\big(q(q',t),t\big)$$

$$= \sum_n \frac{\partial x_j}{\partial q'_n}\big(q(q',t),t\big)\,\dot{q}'_n + \underbrace{\sum_m \frac{\partial x_j}{\partial q_m}\big(q(q',t),t\big)\,\frac{\partial q_m(q',t)}{\partial t} + \frac{\partial x_j}{\partial t}\big(q(q',t),t\big)}_{\frac{\partial}{\partial t}x_j(q(q',t),t)}$$

$$= \sum_n \frac{\partial x_j}{\partial q'_n}(q',t)\,\dot{q}'_n + \frac{\partial x_j}{\partial t}(q',t)$$

also:

$$\dot{x}(q',\dot{q}',t) = \dot{x}\big(q(q',t),\,\dot{q}(q',\dot{q}',t),\,t\big) \qquad \text{q.e.d.}$$

3.5 Nichtholonome Systeme

ZB → Ungleichung ↯

ZB → differenziell (nicht integrierbar) ?

ZB → holonom

ZB → differenziell (integrierbar) ✓

holonom ← differenziell (integrierbar)

holonom → skleronom ✓

holonom → rheonom ✓

beachte: es gibt keine generalisierten Koordinaten q!

---

betrachte System mit K differenziellen ZB (integrierbar oder nicht):

$s = 1, \dots, K$

für virtuelle Verrückungen δx_j (momentan, mit ZB verträglich, sonst beliebig) gilt also

$s = 1, \dots, K$ $\quad (*)$

ZB werden durch ZK realisiert:

bzw. für konservatives System mit $L = T - U$:

$\left(= \sum_j \frac{m_j}{2} \dot{x}_j^2 - U(x)\right)$

$j = 1, \dots, 3N$

Prinzip der virtuellen Arbeit $\sum_j Z_j \, \delta x_j = 0$, also

(die ZK sind damit eliminiert)

beachte: die δx_j sind nicht unabhängig

mit (*) folgt

für beliebige $\lambda_s = \lambda_s(x, \dot{x}, t)$, Lagrange-Multiplikatoren

Aufteilung der Summe:

$$\sum_{j=1}^{3N} (\cdots)_j \, \delta x_j = \sum_{j=1}^{3N-K} (\cdots)_j \, \delta x_j + \underbrace{\sum_{j=3N-K+1}^{3N} (\cdots)_j \, \delta x_j}_{K \text{ Terme!}}$$

wähle $\lambda_s \ (s = 1, .., K)$ so, dass

$$(\cdots)_j = 0 \qquad \text{für } j = 3N-K+1, .., 3N$$

lineares, inhomogenes Gleichungssystem in den λ_s
mit $x, \dot{x}$ - abhängigen Koeffizienten

es folgt also

$$\sum_{j=1}^{3N-K} (\cdots)_j \, \delta x_j = 0$$

$\delta x_1, \dots, \delta x_{3N-K}$ lassen sich als <u>unabhängig</u> voneinander auffassen, denn es können immer $\delta x_{3N-K+1}, \dots, \delta x_{3N}$ gefunden werden, so dass (**) erfüllt ist!

$$(*) \hat{=} (**): \quad \sum_{j=1}^{3N-K} a_{js}\, \delta x_{j} + \sum_{j=3N-K+1}^{3N} a_{js}\, \delta x_{j} = 0$$

$K \times K$ lineares, inhomogenes Gleichungssystem in δx_j für $j = 3N-K+1, \dots, 3N$

damit gilt (wegen der Unabhängigkeit der δx_j für $j = 1, \dots, 3N-K$)

$$(\cdots)_j = 0 \qquad \text{für } j = 1, \dots, 3N-K$$

sowieso gilt (wegen der Wahl der λ_s)

$$(\cdots)_j = 0 \qquad \text{für } j = 3N-K+1, \dots, 3N$$

also

mit $L = \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 - U(x)$ $\quad F_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j}$ gilt

$$m_j \ddot{x}_j = F_j + \underbrace{\sum_s \lambda_s a_{sj}}_{Z_j}$$

Rechnung kann also auch als alternative Herleitung von LI aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit aufgefasst werden!

falls die ZB integrierbar sind, falls also

folgt

---

neben den Bewegungsgleichungen sind (zur Festlegung der K Lagrange-Multiplikatoren) die K ZB zu berücksichtigen

$$\sum_j a_{sj} \cdot dx_j + b_s \, dt = 0$$

bzw.

$$\sum_j a_{sj} \cdot \dot{x}_j + b_s = 0$$