Bsp: ebenes Pendel

1) generalisierte Koordinaten einführen (φ) und Transformationsformeln aufstellen:

$$\begin{aligned} x &= l \sin\varphi \\ z &= -l\cos\varphi \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \dot{x} &= l\cos\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{z} &= l\sin\varphi\,\dot{\varphi} \end{aligned}$$

2) $L(q,\dot{q},t)$ bestimmen

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$U = mgz = -mgl\cos\varphi$$

also:

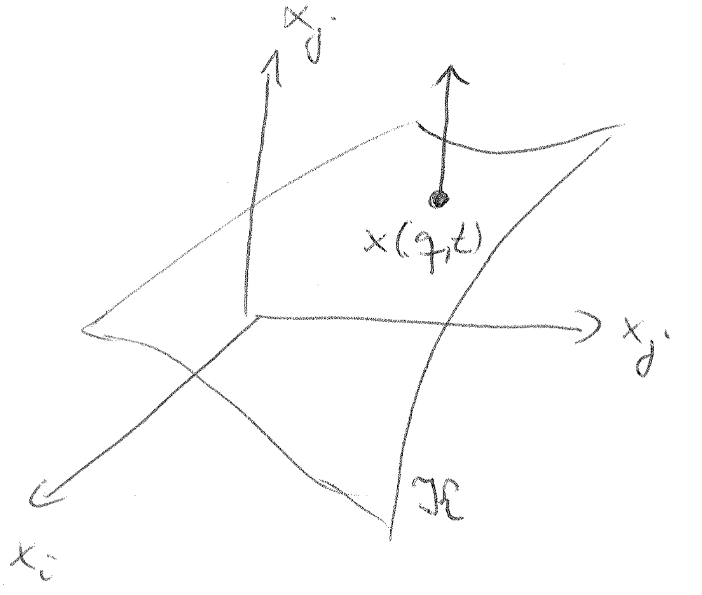
$$L = L(\varphi,\dot{\varphi},t) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$$

3) LG aufstellen

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

geometrische Interpretationen



t fest

$f = 3N-k$-dimensionaler Konfigurationsraum $\mathcal{K}$:

$\{x \mid f_s(x,t) = 0\}$

oder

$\{x(q,t) \mid \underbrace{q = (q_1 \ldots q_f)}_{\text{beliebig}}\}$

$Z = (Z_1, \ldots, Z_{3N}) \perp \mathcal{K}$ (Postulat an Form der ZK)

also

$$Z = \sum_s \lambda_s \nabla_x f_s(x,t)$$

$\nabla_x f_s$: Normalenvektor

oder

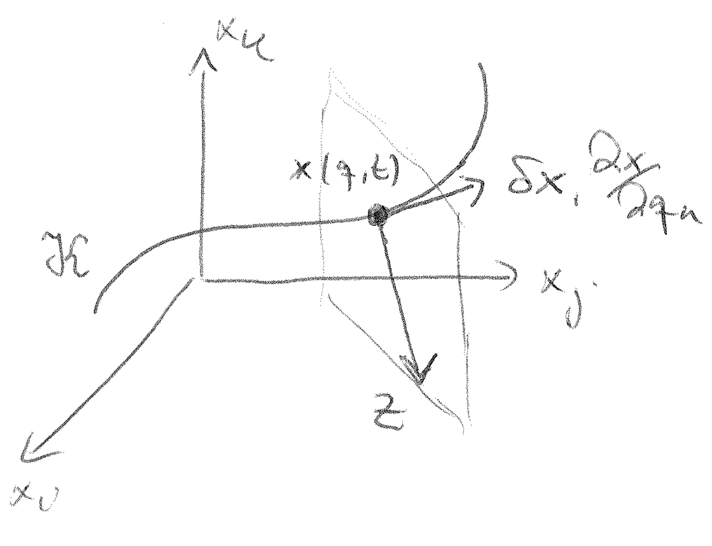
$$Z \cdot \frac{\partial x}{\partial q_n} = \sum_j Z_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_n} = 0$$

$\frac{\partial x}{\partial q_n}$: Tangentenvektor

oder

$$Z \cdot \delta x = \sum_j Z_j \cdot \delta x_j = 0$$

δx: infinites. Tangentenvektor



L II gelten auch für nichtkonservative Kräfte, die durch ein <u>geschwindigkeitsabhängiges Potenzial $\mathcal{U}(x,\dot{x})$</u> über

$$F_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_j}$$

bestimmt sind, denn es folgt

$$Q_n = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_n}$$

Beweis:

mit $\mathcal{U}(q,\dot{q},t) = \mathcal{U}(x(q,t), \dot{x}(q,\dot{q},t))$

Bsp: Lorentz-Kraft, s.u.

3.3 Erhaltungsgrößen

i. allg. ist

$$L = L(q_1, \dots, q_f, \dot q_1, \dots, \dot q_f, t)$$

a) $\dot q$ - Abhängigkeit

betrachte generalisierte Koordinate q_n

$\exists j$ so dass x_j abhängig von q_n (sonst q_n überflüssig)

also $\frac{\partial x_j}{\partial q_n} \neq 0$

kinetische Energie

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m_j \left(\sum_m \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial q_m}}_{\neq 0 \text{ für } m=n} \dot q_m + \frac{\partial x_j}{\partial t} \right)^2$$

also T und damit L abhängig von $\dot q_n$

$\Rightarrow$

ansonsten: q_n überflüssig, keine generalisierte Koord.

b) q-Abhängigkeit

sei L unabhängig von q_n für ein n:

Def:

aus L II , $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0$ folgt

c) t-Abhängigkeit

sei L unabhängig von t , $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, $L = L(q, \dot{q})$

dann gilt

also ob

somit:

phys. Bedeutung der Erhaltungsgröße?

weitere Annahmen:

1) konservatives System, d.h. $U = U(q)$
(keine geschwindigkeitsabhängige Kraft, $U = U(q, \dot{q}, t)$)

2) skleronome ZB (zeitunabhängig)

3) zeitunabhängige Transformationsformeln $x = x(q)$

Bsp: skleronome ZB $x^2 + y^2 - R^2 = 0$

generalisierte Koordinate: α

Transformationsformeln $x = \sin \alpha t$
$y = \cos \alpha t$

(zeitabhängig trotz skleronomer ZB
durch ungeschickte Wahl der gen. Koord.)

damit folgt

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m_j \left(\sum_n \frac{\partial x_j}{\partial q_n} \dot{q}_n + \cancel{\frac{\partial x_j}{\partial t}} \right)^2$$

$$= \sum_{mn} \underbrace{\left(\sum_j \frac{1}{2} m_j \frac{\partial x_j}{\partial q_m} \frac{\partial x_j}{\partial q_n} \right)}_{a_{mn}(q) = a_{nm}(q)} \dot{q}_m \dot{q}_n$$

also

$$\sum_n p_n \dot{q}_n = \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n \overset{\mathcal{U} = \mathcal{U}(q)}{=} \sum_n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n$$

$$= \sum_n \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_n} \sum_{kl} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \right) \dot{q}_n$$

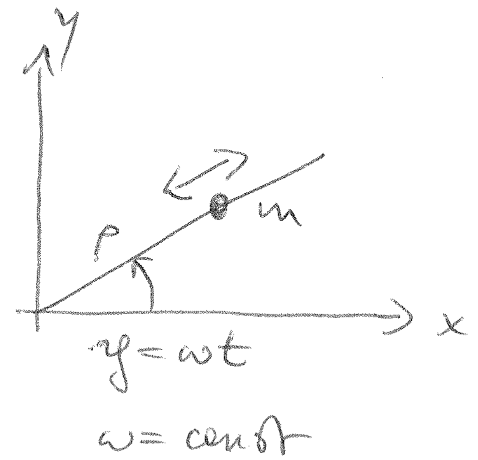
$$= \sum_n \left(\sum_l a_{nl} \dot{q}_l + \sum_k a_{kn} \dot{q}_k \right) \dot{q}_n$$

$$= \sum_n \left(2 \sum_l a_{nl} \dot{q}_l \right) \dot{q}_n$$

$$= 2 \sum_{nl} a_{nl} \dot{q}_n \dot{q}_l = 2T$$

$$\sum_n p_n \dot{q}_n - L = 2T - (T - \mathcal{U}) = T + \mathcal{U} = E$$

Bsp: Massenpunkt auf rotierender Stange



$N = 1$

ZB $z = 0$ (trivial)

$y/x - \tan \omega t = 0$

$f = 1$

generalisierte Koordinate ρ

Transformationsformeln:

$$x = \rho \cdot \cos \omega t \qquad \dot{x} = \dot{\rho} \cos \omega t - \omega \rho \sin \omega t$$
$$y = \rho \cdot \sin \omega t \qquad \dot{y} = \dot{\rho} \sin \omega t + \omega \rho \cos \omega t$$

System holonom (keine Kraft!), ZB rheonom

→ keine Energieerhaltung

(anschaulich rheonome ZK verrichtet reale Arbeit)

Lagrange-Funktion

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \omega^2 \rho^2) = L(\rho, \dot{\rho})$$

also: $\partial L / \partial t = 0$

Erhaltungsgröße

$$\text{const} = p_\rho \cdot \dot{\rho} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \dot{\rho} - L = m\dot{\rho}^2 - \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \omega^2 \rho^2)$$
$$= \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 - \omega^2 \rho^2)$$

beachte

$$T + \mathcal{U} = T = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \omega^2\rho^2) \neq \text{const}$$

$L\overline{\mathrm{II}}$:

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\rho} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = \frac{d}{dt}(m\dot\rho) - m\omega^2\rho = m(\ddot\rho - \omega^2\rho)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot\rho = \omega^2\rho$$

$$\Rightarrow \quad \rho(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$$

sei $\dot\rho(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1\omega - c_2\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = c$

sei $\rho(0) = \rho_0 \quad \Rightarrow \quad 2c = \rho_0$

$$\rho(t) = \frac{1}{2}\rho_0(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = \rho_0 \cosh \omega t$$

es ist

$$T + \mathcal{U} = \frac{m}{2}\left(\rho_0^2\omega^2 \sinh^2\omega t + \omega^2\rho_0^2 \cosh \omega t\right)$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2\rho_0^2 (\sinh^2\omega t + \cosh^2\omega t) \neq \text{const}$$

$$p \cdot \dot q - L = \frac{m}{2}\omega^2\rho_0^2(\sinh^2\omega t - \cosh^2\omega t) = -\frac{m}{2}\omega^2\rho_0^2$$

$$= \text{const}$$