3 Lagrange-Gleichungen zweiter Art

ZK oft nicht interessant

Eliminieren der ZB (nicht nur der ZK) möglich?

Krummlinige (angepasste) Koordinaten verwendbar?

Reduktion der Anzahl der Gleichungen

3.1 Generalisierte Koordinaten

Def: Anzahl der Freiheitsgrade eines holonomen Systems

$$\boxed{f = 3N - K}$$

Anzahl der notwendigen und hinreichenden Größen zur Festlegung der Positionen aller Teilchen

Bsp: A - Gleiten auf Ebene

$f = 2$ $\quad (x, y)$

C - ebenes Pendel

$f = 1$ $\quad (\vartheta)$

D - Perle auf Draht

$\cancel{f = 2}$ $\quad (\cancel{x,y}, z)$

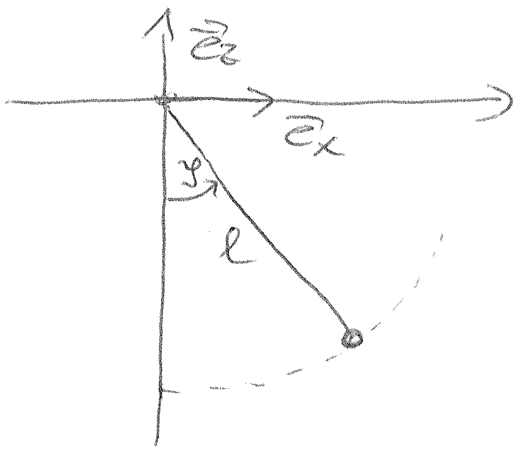
$f = 1$

generalisierte Koordinaten

Def: (für holonomes System, $f = 3N - K$)

f Größen $q = (q_1, \dots, q_f)$ heißen generalisierte Koordinaten, falls q zusammen mit den K ZB alle kartesischen Koordinaten eindeutig festlegen:

Bsp: ebenes Pendel



$N = 1 \quad K = 2 \quad f = 1$

ZB $\quad x^2 + z^2 - \ell^2 = 0$

$\quad\quad y = 0$

kart. Koord.: x, y, z

gen. Koord.: φ

Transformationsformeln

$$x = \ell \sin\varphi$$

$$(y = 0)$$

$$z = -\ell \cos\varphi$$

Parameter

$$\ell = \text{const.}$$

- q_n ($n=1,..,f$) haben nicht notwendig die Dimension einer Länge

  (Bsp.: φ)

- $q=(q_1,..,q_f)$ sind nicht eindeutig

  (Bsp.: andere Wahl $q = x$ z.B.; beachte: (x,z) sind wegen $f=1$ keine gen. Koord.!)

- generalisierte Koordinaten berücksichtigen automatisch alle ZB!

  es gilt <u>für beliebige Werte der q</u>:

  kurz:

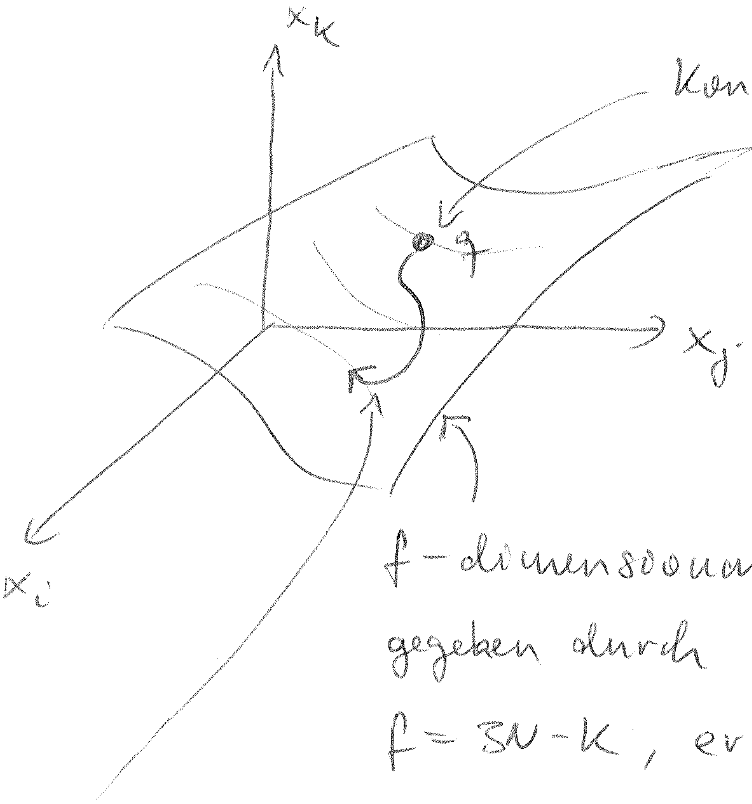
  dagegen ist $f_s(x,t)=0$ ($s=1,..,k$) ein Satz von Bedingungen an die x (ZB)

<u>Bsp</u>: ebenes Pendel

$$x^2+z^2-\ell^2 = \ell^2\sin^2\varphi + \ell^2\cos^2\varphi - \ell^2 = 0 \quad \forall\varphi$$

- $x_j = x_j(q,t)$ Parameterdarstellung des $f=3N-k$-dimensionalen <u>Konfigurationsraums</u>

– $q = (q_1, \dots, q_f)$: Punkt im <u>Konfigurationsraum</u>



Konfiguration des Systems, verträglich mit allen ZB

(kart. Koord.)
(3N-dim. Raum)

f-dimensionale Hyperfläche gegeben durch $f_s(x,t) = 0 \quad s = 1, \dots, K$, $f = 3N - K$, evtl. zeitabhängig

Zeitentwicklung des Gesamtsystems:
Trajektorie $q(t)$ für alle t verträglich mit ZB

---

aus den Transformationsformeln folgt:

– $\dot{q}_n$, $n=1,\dots,f$ heißen <u>generalisierte Geschwindigkeiten</u>

– beachte:

in $\dot{x}_j = \dot{x}_j(q, \dot{q}, t)$ werden die $\dot{q}_n$ als unabhängige Variablen aufgefasst

– die $\dot{q}$ – Abhängigkeit ist linear!

also:

Bsp: ebenes Pendel

$$x = l \sin\varphi \qquad z = -l\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \dot{x} = l\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \qquad \dot{z} = l \sin\varphi\, \dot{\varphi}$$

$$= \dot{x}(\varphi, \dot{\varphi}, \cancel{t}) \qquad = \dot{z}(\varphi, \dot{\varphi}, \cancel{t})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\varphi}} = l\cos\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \qquad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{\varphi}} = l\sin\varphi = \frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

Ziel: Bewegungsgleichungen ohne ZK / ZB

LI: $m_j \cdot \ddot{x}_j = F_j(x,\dot{x},t) + \sum_{s=1}^{k} \lambda_s(x,\dot{x},t) \frac{\partial}{\partial x_j} f_s(x,t)$

$(j = 1, \dots, 3N)$

Eliminierung der ZK:

Multiplikation mit $\frac{\partial x_j}{\partial q_n}(q,t)$, $\sum_j$:

es gilt: (für mit den ZB verträgliche x, also für $x = x(q,t$

- f Gleichungen für f gen. Koordinaten
- $3N \underset{\uparrow !}{-} K$ Gleichungen (LI: $3N + K$)
- keine ZK / ZB, nur $x_j = x_j(q,t)$ nötig

Alternative:

d'Alembertsches Prinzip

$$\sum_{j=1}^{3N} \left(F_j - m_j \ddot{x}_j \right) \delta x_j = 0$$

mit $x_j = x_j(q_1, .., q_f, t)$ ist

($\delta t = 0$!)

somit

Die $q_1, .., q_f$ können unabhängig variiert werden,
denn ZB $f_s(x(q,t),t) = 0 \quad \forall q$!

beachte: im d'Alembert-Prinzip sind die x_j
nicht unabhängig (wegen der ZB)
also $(F_j - m_j \ddot{x}_j) \neq 0$

Bsp: ebenes Pendel

$x = l \sin \varphi \quad z = -l \cos \varphi \quad F_x = 0 \quad F_z = -mg$

also:

$$m \frac{d^2(l \sin \varphi)}{dt^2} (l \cos \varphi) + m \frac{d^2(-l \cos \varphi)}{dt^2} (l \sin \varphi)$$

$$= 0 \cdot (l \cos \varphi) + (-mg)(l \sin \varphi)$$

d.h.

$$\underbrace{\frac{d^2(\sin \varphi)}{dt^2}}_{\frac{d}{dt}(\cos \varphi \, \dot{\varphi})} \cos \varphi - \underbrace{\frac{d^2(\cos \varphi)}{dt^2}}_{-\cos \varphi \, \dot{\varphi}^2 - \sin \varphi \, \ddot{\varphi}} \sin \varphi = -\frac{g}{l} \sin \varphi$$

$$\frac{d}{dt}(\cos \varphi \, \dot{\varphi}) = -\sin \varphi \, \dot{\varphi}^2 + \cos \varphi \, \ddot{\varphi}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad \checkmark$$

Nachteil der Bewegungsgleichung:

enthält kart. Kraftkomponenten und Koordinaten

3.2 Lagrange-Funktion und Lagrange-Gleichungen zweiter Art

$$\sum_j m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n} = \sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n} = Q_n$$

Def.:

betrachte konservatives System, d.h. $\exists$ Potenzial

$$U = U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = U(x_1, \dots, x_{3N}) = U(x)$$

es ist $U(x) \neq U(x,t)$, aber u.U. $x = x(q,t)$, d.h.

und

konservatives System:

vergl.: $F_j = -\frac{\partial U(x)}{\partial x_j}$

(U mit expliziter t-Abhängigkeit nur bei t-abhängigen Transformationsformeln $x = x(q,t)$!)

Bsp: ebenes Pendel

$$U = V = V(z) = mgz = -mgl\cos\varphi = U(\varphi)$$

denn: $F_z = -\frac{d}{dz}(mgz)$ $\qquad z = -l\cos\varphi$

generalisierte Kraft

$$Q_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi$$

---

jetzt Diskussion der kinetischen Energie

(Bezug zur anderen Seite der Bewegungsgleichung

$\sum_j m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n}$?)

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 = T(\dot{x}) \qquad \dot{x} = \dot{x}(q,\dot{q},t)$$

$$T(q,\dot{q},t) = T(\dot{x}(q,\dot{q},t))$$

es ist

(lineare $\dot{q}$-Abh.!)

also

– $T = T(q, \dot{q}, t)$: maximal quadratische $\dot{q}$-Abh.

– T i. allg. auch von q abhängig
(beachte $a_{mn} = a_{mn}(q,t)$, $b_m = b_m(q,t)$)

Bsp: ebenes Pendel

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left[\left(l\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2 + \left(l\sin\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2\right]$$

$$= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 = T(\dot{\varphi}) = T(\cancel{\varphi}, \dot{\varphi}, \cancel{t})$$

nicht typisch!

---

falls $x(q,t) = x(q)$:

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m_j \sum_m \frac{\partial x_j}{\partial q_m}\dot{q}_m \sum_n \frac{\partial x_j}{\partial q_n}\dot{q}_n = \sum_{mn} a_{mn}\dot{q}_m\dot{q}_n$$

mit $a_{mn} = a_{mn}(q)$

also $T = T(\dot{q})$

Ableitungen von $T(q,\dot q,t) = T(\dot x(q,\dot q,t))$:

beachte:

$$\sum_j m_j \ddot x_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n} \left(= \sum_j F_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_n}\right) = Q_n$$

zweite Ableitung

(Bewegungsgleichung)

daher:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_n} = \frac{d}{dt}\sum_j m \dot x_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n}$$

$$= \underbrace{\sum_j m_j \ddot x_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n}}_{\checkmark} + \underbrace{\sum_j m_j \cdot \dot x_j \frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_n}}_{?}$$

also:

$$Q_n = \sum_j m_j \cdot \ddot x_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_n} - \overbrace{\sum_j m_j \cdot \dot x_j \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial t}}_{?}}^{?}$$

es gilt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_n} =$$

$$=$$

andererseits gilt

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_n} =$$

$$=$$

also

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_n} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_n}$$

und somit

$$\sum_j m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_n} = \sum_j m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_n} = \frac{\partial T}{\partial q_n}$$

zusammen also:

keine ZK / ZB

keine kartesischen Koordinaten

f Gleichungen, f Unbekannte

für konservative Systeme ist

$$Q_n = -\frac{\partial U}{\partial q_n} = -\frac{\partial U}{\partial q_n} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_n}$$

trivial, denn $U = U(q,t)$, $\dot{q}$-unabhängig

und somit

Def: Lagrange-Funktion

(für konservative Systeme und Systeme mit
$Q_n = -\frac{\partial U}{\partial q_n} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_n}$)

damit gilt

Lagrange-Gleichungen zweiter Art, $L\,\overline{\underline{II}}$

$n = 1, \ldots, f$

- alle Ziele erreicht (keine ZK/ZB in Bew.glg.; keine kart. Koord.; nur $f = 3N - K$ Glgen.)
- $L = T - U$ Skalar, ohne direkte physikalische Bedeutung
- verschiedene Sätze generalisierter Koordinaten denkbar $L(q, \dot{q}, t)$ davon abhängig, nicht eindeutig