c) $N = 2$, $K = 1$

zB $\quad f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = 0$

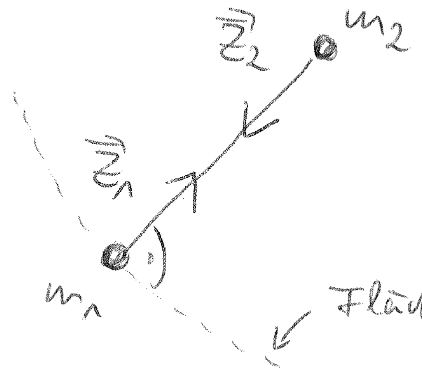
es gilt

$$\vec{Z}_1 \perp \text{Fläche } f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = 0 \qquad (\vec{r}_2, t \text{ fest})$$

$$\vec{Z}_2 \perp \text{Fläche } f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = 0 \qquad (\vec{r}_1, t \text{ fest})$$

<u>Bsp</u> Hantel

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - \ell^2 = 0$$



es gilt:

$$\vec{Z}_1 = \lambda_1 \vec{\nabla}_1 f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\lambda_1 \vec{\nabla}_2 f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\vec{Z}_2 = \lambda_2 \vec{\nabla}_2 f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

mit N III folgt $\left(\vec{Z}_1 \overset{!}{=} -\vec{Z}_2\right)$:

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2}$$

allgemein ist für $(N \geq 1)$

innere ZK: $f = f(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$, $\vec{Z}_i = -\vec{Z}_j$

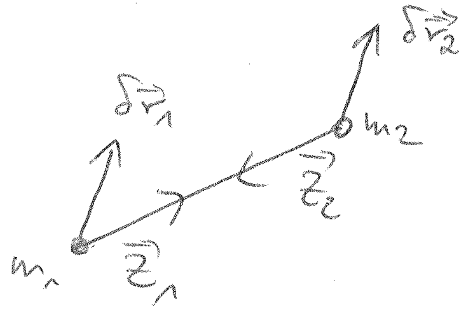
$$\vec{Z}_i = \lambda \, \mathrm{grad}_i f$$

λ unabhängig von i

äußere ZK: $f = f(\vec{r}_i)$

$$\vec{Z}_i = \lambda \, \mathrm{grad}_i f \quad \text{(trivial denn } \vec{Z}_j = 0\text{)}$$

Bsp Hantel



hier (mit ZB verträglich!)

$$\delta\vec{r}_1 = \delta\vec{r}_2$$

$$\delta W = \vec{Z}_1 \delta\vec{r}_1 + \vec{Z}_2 \delta\vec{r}_2 = 0$$

aber

$$\vec{Z}_1 \delta\vec{r}_1 , \vec{Z}_2 \delta\vec{r}_2 \neq 0 \quad !$$

allgemein wird postuliert für

dass

bzw.

es gilt

Prinzip der virtuellen Arbeit

(ZK verrichten keine virt. Arbeit)

$\delta \vec{r}_i$:
- infinitesimal
- momentan ($\delta t = 0$)
- mit ZB verträglich
- virtuell (gedacht, entsprechen nicht der tatsächlichen Teilchenbahn)

mit $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i$ folgt

d'Alembertsches Prinzip

(Postulat an die Form der ZK)

2.3 Lagrange-Gleichungen erster Art

N Teilchen

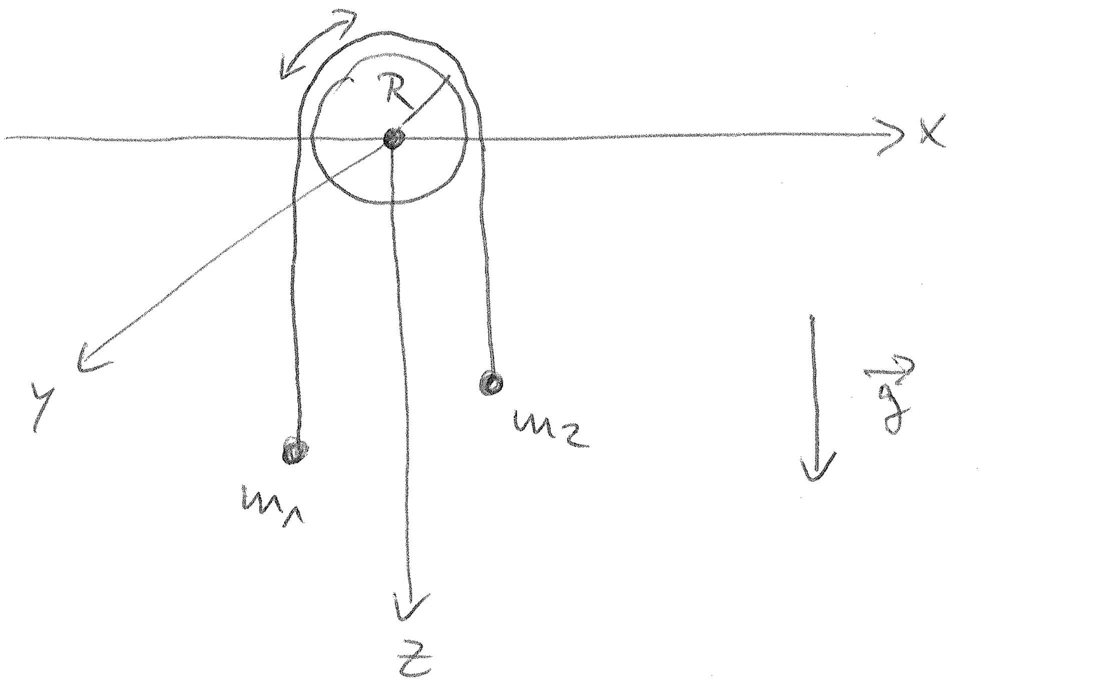
K holonome ZB

LI:

3N + K Gleichungen / DGL

3N + K Unbekannte: x_j, λ_s

Anwendungsbeispiel: Atwoodsche Fallmaschine



1) Formulierung der ZB

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -R \\ x_2 &= R \\ y_1 &= 0 \\ y_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{trivial (Bewegung entlang } z\text{)}$$

$z_1 + z_2 = \ell = \text{const}$ (mit $\ell = L - \pi R$, L: Seillänge)

effektiv: $2+1$ Glgen. für z_1, z_2, λ $(K=1)$

statt $6+5$ Glgen für $x_1, \dots, z_2, \lambda_1, \dots, \lambda_5$ $(K=5)$

2) Aufstellen von LI

$$m_1 \ddot{z}_1 = F_1 + \lambda \frac{\partial}{\partial z_1} f(z_1, z_2, t)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = F_2 + \lambda \frac{\partial}{\partial z_2} f(z_1, z_2, t)$$

es ist:

$$f(z_1, z_2, \ell) = z_1 + z_2 - \ell$$

$$F_1 = m_1 g$$

$$F_2 = m_2 g$$

also:

$$m_1 \ddot{z}_1 = m_1 g + \lambda$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g + \lambda$$

$$z_1 + z_2 - \ell = 0$$

3) zB zweimal differenzieren (nach t)

$$\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0$$

4) Bewegungsgleichungen einsetzen

$$\frac{m_1 g + \lambda}{m_1} + \frac{m_2 g + \lambda}{m_2} = 0$$

5) Auflösen nach λ

$$\lambda = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

6) Einsetzen in Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{z}_1 = m_1 g - 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \ddot{z}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \ddot{z}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

7) Lösen der Bewegungsgleichungen

$$z_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \frac{1}{2} t^2 + c_1 t + d_1$$

$$z_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \frac{1}{2} t^2 + c_2 t + d_2$$

c_1, c_2, d_1, d_2 Integrationskonstanten

8) Bestimmung der ZK

$$\vec{Z}_1 = \lambda \frac{\partial}{\partial z_1} f \cdot \vec{e}_z = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{Z}_2 = \vec{Z}_1 = \lambda \frac{\partial}{\partial z_2} f \cdot \vec{e}_z$$

9) Festlegen der Integrationskonstanten

Anfangsbedingungen

$$z_1(t_0) = z_{1,0}$$

$$\dot{z}_1(t_0) = \dot{z}_{1,0}$$

ZB z. Zt. t_0

$$z_1(t_0) + z_2(t_0) - l = 0$$

$$\dot{z}_1(t_0) + \dot{z}_2(t_0) = 0$$

beachte:

ZB $f(z_1, z_2)$ nicht von der Form $f(z_1 - z_2)$

und daher $\vec{Z}_1 \neq -\vec{Z}_2$

Prinzip der virtuellen Arbeit

$$Z_1 \delta z_1 + Z_2 \delta z_2 = Z_1 (\delta z_1 + \delta z_2) = 0$$

erfüllt, denn $\delta z_1 = -\delta z_2$

Schritte 1–9 sind <u>allgemeines</u> Konzept!

zB: $f_s(x,t) = 0$ zweimal differenzieren:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_j \frac{\partial f_s}{\partial x_j}(x,t)\cdot \dot{x}_j + \frac{\partial f_s}{\partial t}(x,t)\right] = 0$$

$$\sum_j \frac{\partial f_s}{\partial x_j}\ddot{x}_j + \sum_{jj'} \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_{j'}\partial x_j}\dot{x}_{j'}\dot{x}_j + \frac{\partial^2 f_s}{\partial t^2} + \sum_j \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_j \partial t}\dot{x}_j = 0$$

also:

$$\sum_j \frac{\partial f_s}{\partial x_j}(x,t)\cdot \ddot{x}_j = R_s(x,\dot{x},t)$$

restliche Terme

Bewegungsgleichung einsetzen

somit

$$\sum_j \frac{\partial f_s}{\partial x_j}(x,t)\,\frac{1}{m_j}\left(F_j(x,\dot{x},t) + \sum_s \lambda_s(x,\dot{x},t)\,\frac{\partial f_s}{\partial x_j}(x,t)\right) = R_s(x,\dot{x},t)$$

lineares, inhomogenes Gleichungssystem in den λ_s
(K Gleichungen für K Unbekannte)

$$\Rightarrow \quad \lambda_s = \lambda_s(x,\dot{x},t)$$

$$\Rightarrow \quad m_j\ddot{x}_j = F_j(x,\dot{x},t) + \sum_s \lambda_s(x,\dot{x},t)\,\frac{\partial f_s(x,t)}{\partial x_j}$$

bekannt

✓