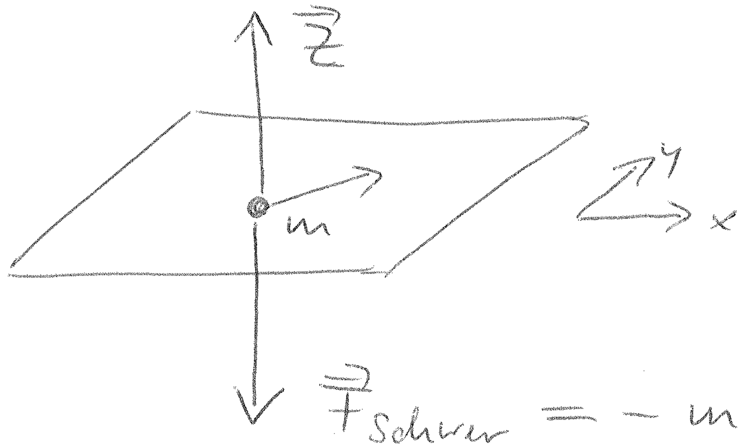
2 d'Alembertsches Prinzip und Lagrange-Gleichungen erster Art

Entwicklung des Formalismus für Systeme mit Zwangsbedingungen (ZB)

2.1 Zwangsbedingungen

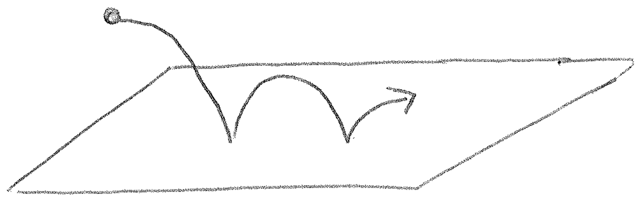
Bsp. A: reibungsfreies Gleiten auf waagerechter Platte



$\vec{F}_{Schwer} = -m\vec{g} \qquad \vec{g} = (0, 0, g)$

ZB realisiert durch Zwangskraft (ZK)

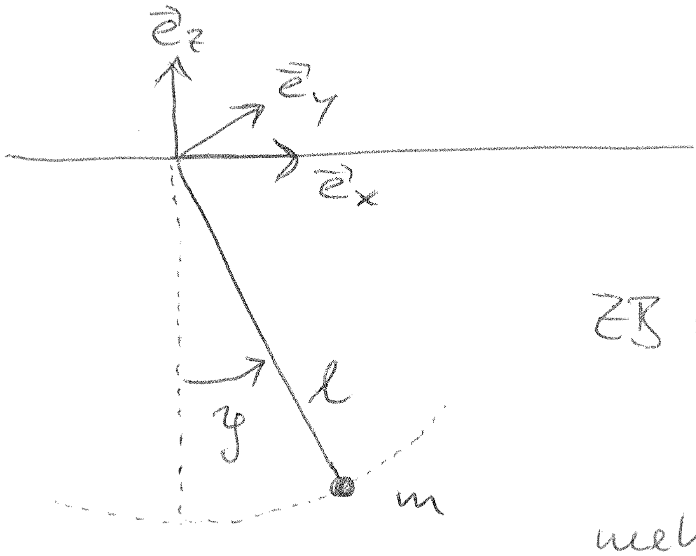
Bsp. B: Hüpfen auf waagerechter Platte



ZB:

ZK:

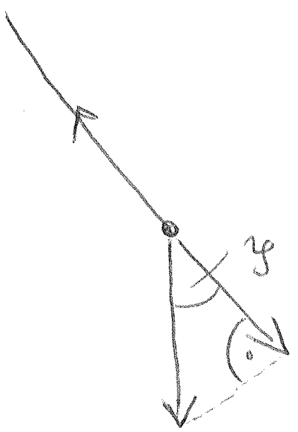
Bsp. C: ebenes Pendel



ZB:

mehrere ZB!

ZK:

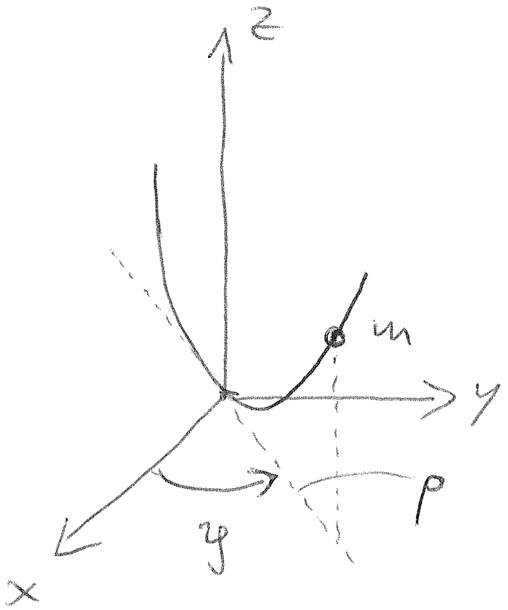


$\vec{Z} =$

ZK abhängig vom Bewegungszustand!

$\vec{F}_{schwer} = -mg\,\vec{e}_z$

Bsp. D: Perle auf parabelförmigem Draht, der mit ω um z-Achse rotiert



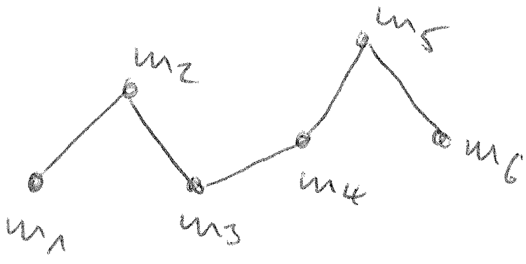
ZB

ZB zeitabhängig!

ω, a Parameter

ZK

Bsp. E: Kettenstück



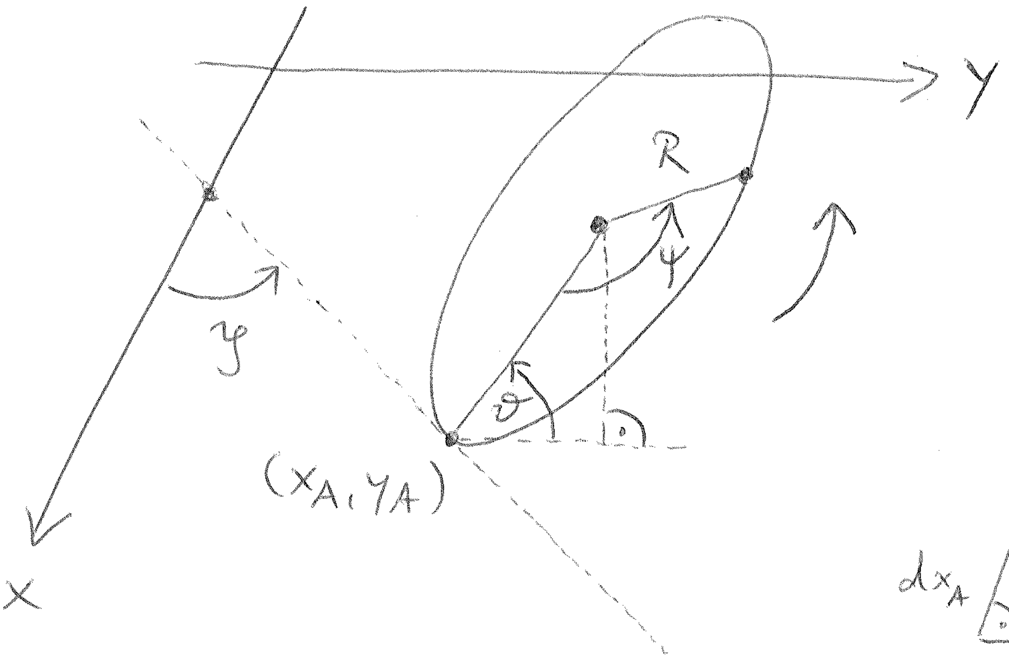
Mehr-Teilchen-System

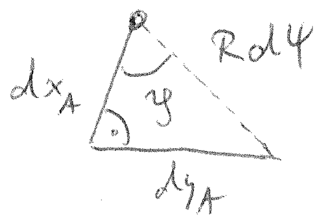
$N = 6$

$K = 5$ ZB

mit $x = (x_1, \dots, x_{3N}) = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ sind die ZB von der Form

Bsp. F: ohne Schlupf rollende Kreisscheibe





(x_A, y_A) : Auflagepunkt

φ : Rollwinkel

ϑ : Neigungswinkel

γ : Winkel zwischen Scheibenebene und x-Achse

(bei infinitesimalem Abrollen $d\varphi$ ist $\gamma = \text{const}$)

ZB:

(k = 2)

differenziell!

Klassifikation:

ZB

holonom ("ganz gesetzlich")

- skleronom ("starr")
- rheonom ("fließend")

nicht holonom

<u>holonome ZB</u>

$$f_s(\vec{r}, t) = 0 \qquad s = 1, \ldots, K \qquad N = 1$$

$$f_s(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0 \qquad s = 1, \ldots, K \qquad N \geq 1$$

oder $$f_s(x_1, \ldots, x_{3N}, t) = 0 \qquad s = 1, \ldots, K$$

oder $$f_s(x, t) = 0 \qquad s = 1, \ldots, K$$

<u>holonom-skleronome ZB</u>

$$f_s(x_1, \ldots, x_{3N}) = 0$$ zeitunabhängig

<u>holonom-rheonome ZB</u>

$$f_s(x_1, \ldots, x_{3N}, t) = 0$$

Bsp	holonom?	skleronom?	K
A	✓	✓	1
B	×	×	1
C	✓	✓	2
D	✓	×	2
E	✓	✓	5
F	?	?	2

eine holonome ZB

kann differenziell formuliert werden

$$0 = df_s = \frac{\partial f_s}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_s}{\partial x_{3N}} dx_{3N} + \frac{\partial f_s}{\partial t} dt$$

$$= \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_s}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f_s}{\partial t} dt$$

mit Funktionen

$$a_j = a_j(x_1, \dots, x_{3N}, t) = a_j(x, t)$$

$$b = b(x_1, \dots, x_{3N}, t) = b(x, t)$$

holonome ZB $\longrightarrow$ differenzielle ZB

?

Sei eine differenzielle ZB gegeben:

Annahme: $\exists\, f(x_1, \dots, x_{3N}, t)$ mit

dann ist ZB $\Leftrightarrow$ $df = 0$ $\Leftrightarrow$ $f - \text{const} = 0$

also ZB holonom

---

f existiert genau dann, wenn die <u>Integrabilitätsbedingungen</u> erfüllt sind:

---

vergleiche: gegeben $F_x dx + F_y dy + F_z dz$

$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall\, i,j \Leftrightarrow \text{rot}\, \vec{F} = 0 \Leftrightarrow$

$\exists\, V$ mit $dV = -F_x dx - F_y dy - F_z dz \Leftrightarrow$

$\exists\, V$ mit $\vec{F} = -\text{grad}\, V \Leftrightarrow$

Bsp. 7

$$dx_A + R\cos\gamma \, d\varphi = 0$$
$$dy_A + R\sin\gamma \, d\varphi = 0$$

1. ZB:

$$1\cdot dx_A + 0\cdot dy_A + R\cos\gamma \, d\varphi + 0\cdot d\vartheta + 0\cdot d\gamma = 0$$

Integrabilitätsbedingungen <u>nicht</u> erfüllt, denn z.B.

$$\frac{\partial(R\cos\gamma)}{\partial\gamma} \neq \frac{\partial(0)}{\partial\varphi}$$

$\rightarrow$ es existiert kein $f(x_A, y_A, \varphi, \vartheta, \gamma, t)$
mit $df = 0 \Leftrightarrow$ 1. ZB
(und somit auch kein f(Kart. Koord.))

$\rightarrow$ ZB nicht holonom

nicht holonome ZB

differenziell und nicht integrierbar

werden <u>zunächst</u> nicht weiter betrachtet

Ungleichungen

werden nicht weiter betrachtet

---

beachte: diff. ZB $\sum_j a_j \, dx_j + b\, dt = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_j a_j(x,t)\cdot \frac{dx_j}{dt} + b(x,t) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x, \dot{x}, t) = 0$$

vergl.: holonome ZB: $f(x,t) = 0$

2.2 Zwangskräfte

N II für Systeme mit ZB:

$$m_j \ddot{x}_j = F_j(x,\dot{x},t) + Z_j(x,\dot{x},t) \qquad j = 1,\dots,3N$$

bekannt

realisieren (bekannte, einfache ZB)

Z_j selbst unbekannt, kompliziert

ZB

Problem: Unbekannte x_j

unbekannte Z_j

aber nur Gleichungen / DGL

und

Lösung: Richtung der ZK kann angegeben werden

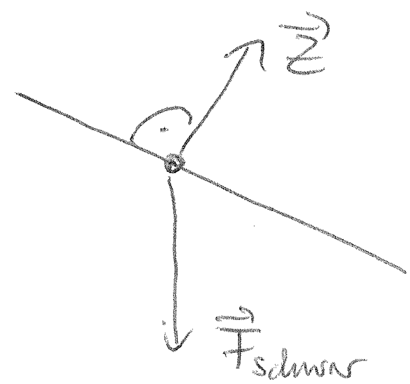
A) $N=1$ Teilchen, $K=1$ holonome ZB

ZB skleronom: $f(\vec{r})=0$

realisiert durch ZK $\vec{Z}$

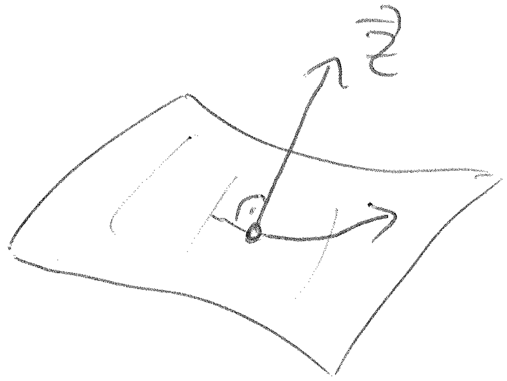
$\vec{Z}$ so, dass "keine Beeinflussung" der mit der ZB verträglichen Bewegung; $\vec{Z}$ soll nur die ZB sicherstellen

<u>Bsp</u> schiefe Ebene



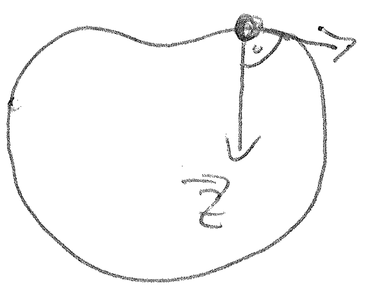
$\vec{Z}$ beschleunigt das Teilchen nicht!

<u>Bsp:</u> krumme Fläche



Teilchen wird als Folge der ZB beschleunigt (auch ohne äußere Kraft $\vec{F}$!)

<u>Bsp:</u>



Perle auf Draht (reibungsfrei) ohne äußere Kraft (z.B. Raumschiff-Exp.)

es gilt: $\dot{\vec{r}}(t_0+T) = \dot{\vec{r}}(t_0)$
(T: Umlaufzeit)

$\vec{Z}$ führt zu keiner Tangentialbeschleunigung es gilt stets:

$d\vec{r}$: mit ZB verträgliche "Verrückung" des Teilchens

$\Rightarrow \quad \vec{Z} \perp$ Fläche $f(\vec{r})=0$

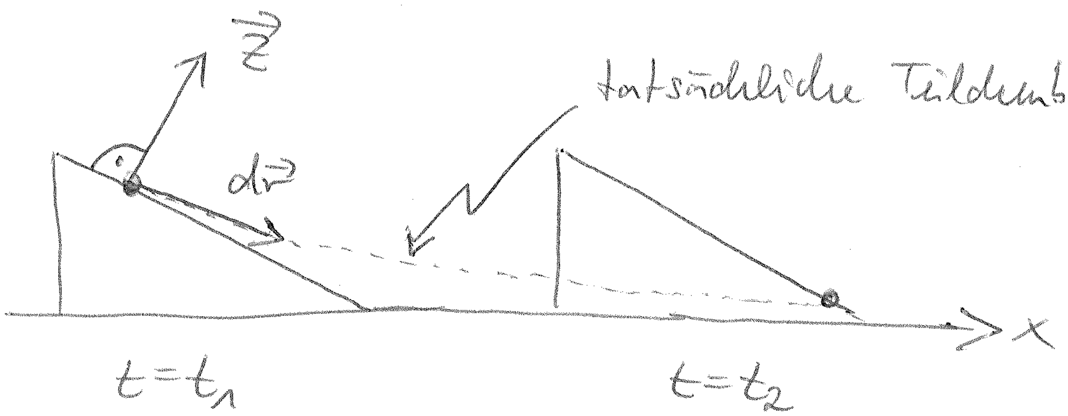
$\Rightarrow \quad \vec{Z} \sim \text{grad} f$

(skleronome) ZK verrichten keine Arbeit

---

rheonome ZB: $\quad f(\vec{r},t)=0$

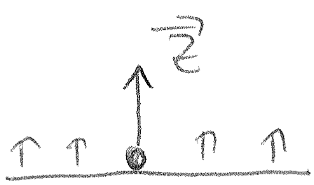
Bsp: bewegte schiefe Ebene



jetzt ist $\vec{Z}\cdot d\vec{r} \neq 0$

die ZK verrichtet reale Arbeit am Teilchen

Bsp: beschleunigtes Anheben einer waagerechten Platte



$\vec{Z} \parallel d\vec{r}$!

jetzt gilt (Prinzip der virtuellen Arbeit)

$\delta\vec{r}$: gedachte, "virtuelle" Verrückung, die <u>momentan</u> mit ZB verträglich ist

also

$\Rightarrow$

Die ZK einer holonomen ZB verrichtet keine

$\left.\begin{array}{l}\text{reale}\\ \text{virtuelle}\end{array}\right\}$ Arbeit, falls ZB $\left\{\begin{array}{l}\text{skleronom}\\ \text{rheonom}\end{array}\right.$

N $\vec{n}$:

ZB

4 Gleichungen / DGL für 4 Unbekannte $(\vec{r}, \lambda)$

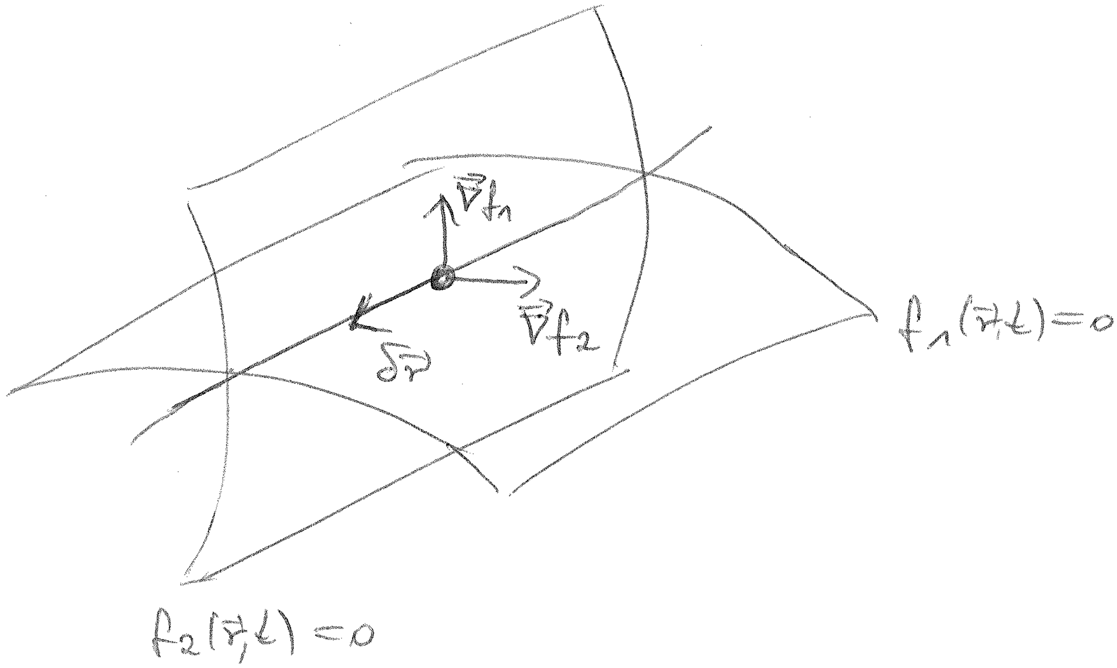
B $N=1$, $K=2$

ZBen: $f_1(\vec{r},t)=0 \Rightarrow$ grad $f_1 \perp$ Fläche $f_1=0$

$f_2(\vec{r},t)=0 \Rightarrow$ grad $f_2 \perp$ Fläche $f_2=0$

Teilchen bewegt sich auf Kurve $f_1=0$, $f_2=0$ (Schnitt der Flächen), falls ZB skleronom, sonst

ZK $\perp$ $\delta\vec{r}$ heißt



allgemein

es gilt:

beachte: 2 weitere Unbekannte (λ_1, λ_2)
neben $\vec{r}$, aber auch 2 ZB!