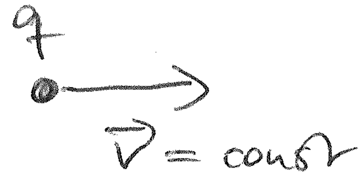
1.4.3 Feld einer geradlinig gleichförmig bewegten Punktladung



$\vec{E}, \vec{B} = ?$

Standard-Strategie:

1) $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

2) retardierte Potentiale (Lorenz-Eichung)

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,', t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$t_{ret} = t - \frac{1}{c} |\vec{r}-\vec{r}\,'|$$

3) $\rho(\vec{r},t) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}(t))$

$\vec{j}(\vec{r},t) = q\,\dot{\vec{r}}(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}(t))$

$\vec{r}(t)$: Trajektorie $\qquad$ hier $\vec{r}(t) = \vec{v} \cdot t$

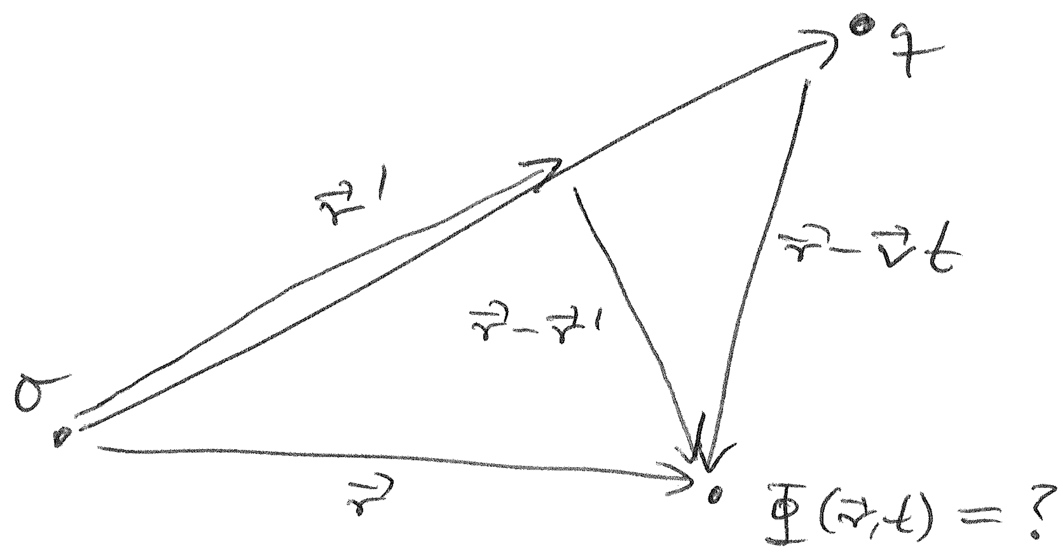
also:

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \, q \, \delta\left(\vec{r}' - \vec{v}\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)\right)$$

Beitrag zu Φ bei $\vec{r}$ z. Zt. t von $\vec{r}'$ mit

$$\vec{r}' - \vec{v}t + \vec{v}\,\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} = 0$$

$$\vec{r}' = \vec{v}t - \vec{v}\,\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} = \vec{r}_{ret.}$$

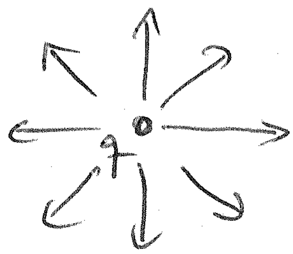


→ Retardierungseffekt!

→ Liénard – Wiechert – Potenziale

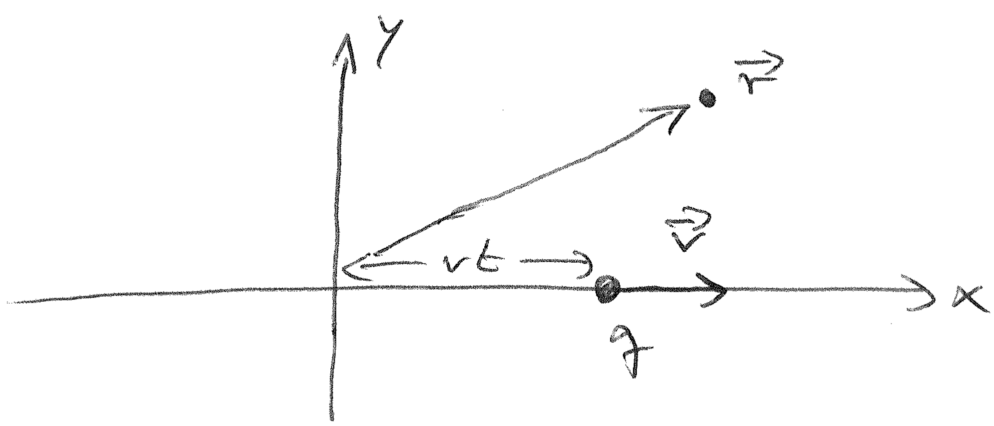
sehr viel einfachere Rechnung:

IS_0: q befinde sich im Ursprung und ruhe



IS (bewegt sich relativ zu IS_0 mit $-v$ in x-Richtung)

q sei bei $x=0$ z. Zt. $t=0$

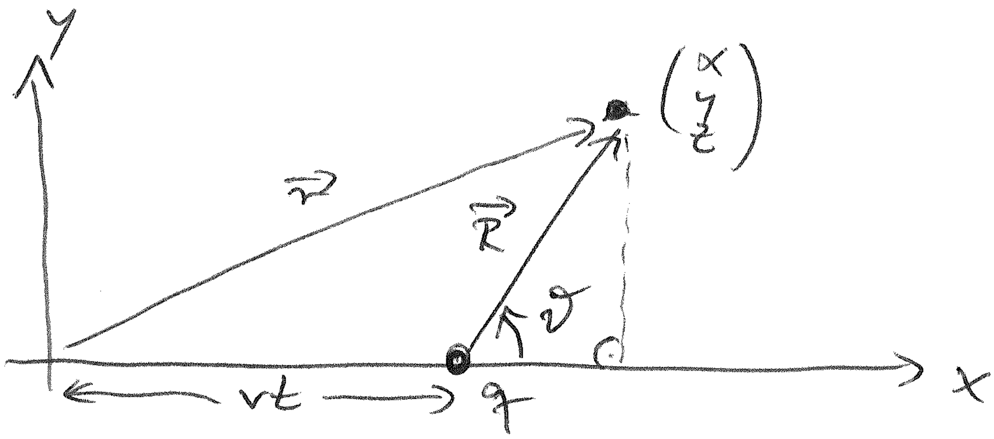


es ist:

($\vec{E}$ ist gegeben in den Koordinaten von IS_0)

es ist:

bzw.:



also:

?

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 R^2 \cos^2\vartheta + R^2 \sin^2\vartheta}^{\,3}} \begin{pmatrix} \gamma R_x \\ \gamma R_y \\ 1 R_z \end{pmatrix}$$

– es gilt: $\vec{E} \parallel \vec{R}$! (obwohl die "Info" von der retardierten Position des Teilchens kommt)

x : Faktor γ – Lorentz-Kontraktion

y, z : Faktor γ – Lorentz-Trsf. der Felder

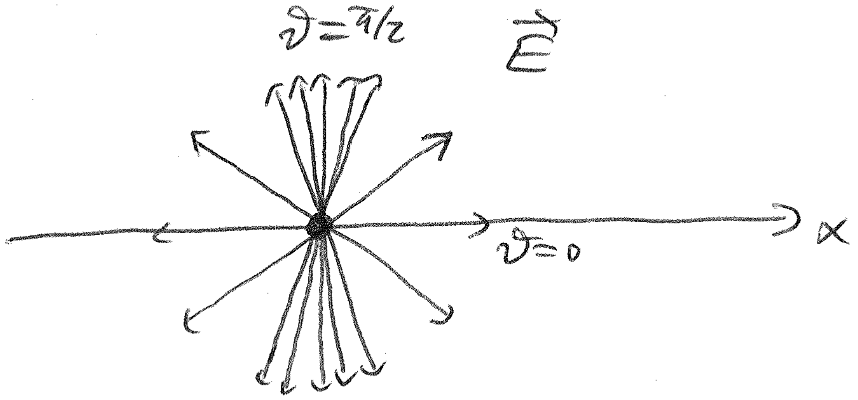
– für $v \ll c$ ist $\gamma \to 1$, nichtrelativistisches Resultat $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \vec{R}/R^3$

– es gilt:

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta}^{\,3}} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{\sqrt{\cos^2\vartheta + \frac{1}{\gamma^2}\sin^2\vartheta}^{\,3}}$$

$$= \frac{1-\beta^2}{\sqrt{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta - \beta^2 \sin^2\vartheta}^{\,3}}$$

$$= \frac{1-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2 \sin^2\vartheta}^{\,3}} \longrightarrow$$



Test: $\oint_{S(r)} \vec{E}\, d\vec{a} = q/\varepsilon_0$ ✓

$\vec{B}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = -\frac{1}{c^2}(-\vec{v}) \times \vec{E}$ (s.o.)

für $\beta \ll 1$ ist also:

???

folgt (fälschlicherweise) aus der Magneto<u>statik</u>formel

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r'\, \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

mit

$$\vec{j}(\vec{r}') = q \cdot \vec{v} \cdot \delta(\vec{r}')$$

1.4.4 Lorentz-Kraft

es gilt:

$$K^\mu = m\, b^\mu = m \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{d\tau} = (K^0, \vec{K})$$

$$p^\mu = (m\gamma c, m\gamma \vec{u}) = (p^0, \vec{p})$$

also:

$$\vec{K} = \frac{d}{d\tau}(m\gamma\vec{u}) = \frac{d}{d\tau}\vec{p} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{K} = \gamma \vec{F}, \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \qquad \vec{F} \neq \vec{F}_{\text{nichtrel.}}\,!$$

Bewegungsgleichung für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld?

nichtrelativistisch:

$$\vec{F}_{\text{nichtrel}} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = m\ddot{\vec{r}}$$

relativistisch:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad ?$$

$$\vec{K} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad ?$$

$\vec{F}_{\text{nichtrel}} = q\,(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ muss durch ein unter Lorentz-Transformationen forminvariantes Gesetz ersetzt werden!

Ansatz:

damit gilt:

also:

$$K_x = q\left(E_x/c \cdot \gamma c + B_z \gamma u_y - B_y \gamma u_z\right)$$

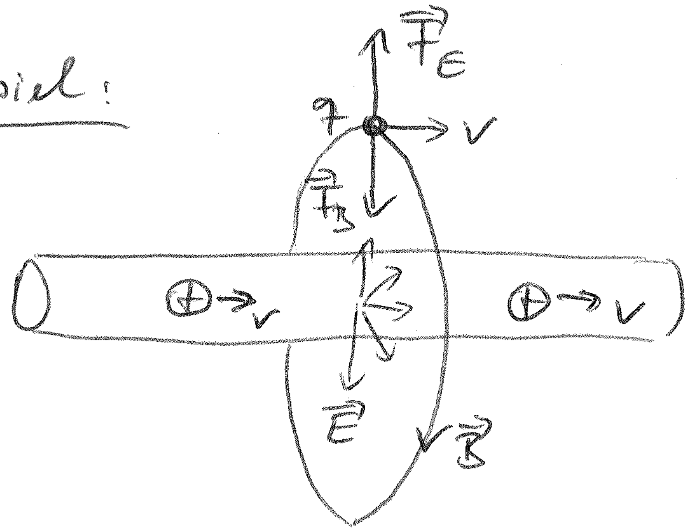
$$K_y = q\left(E_y/c \cdot \gamma c - B_z \gamma u_x + B_x \gamma u_z\right)$$

$$K_z = q\left(E_z/c \cdot \gamma c + B_y \gamma u_x - B_x \gamma u_y\right)$$

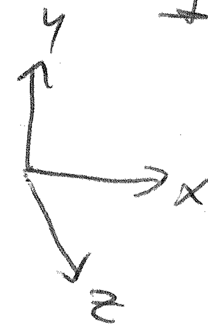
$$\Rightarrow \quad \vec{K} = q\gamma\vec{E} + q\gamma\,\vec{u} \times \vec{B}$$

mit

Beispiel:



IS

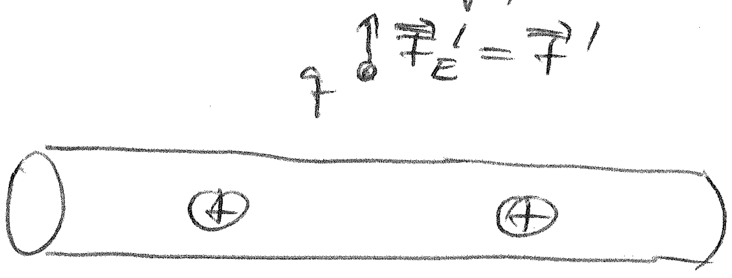


es gilt: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\,\vec{e}_r \qquad \lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\lambda}{2\pi}\cdot v\cdot\frac{1}{r}\,\vec{e}_\varphi$$

$$F = q\,\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\,\underbrace{(1-\varepsilon_0\mu_0 v^2)}_{1-\frac{v^2}{c^2}=\gamma^{-2}}$$

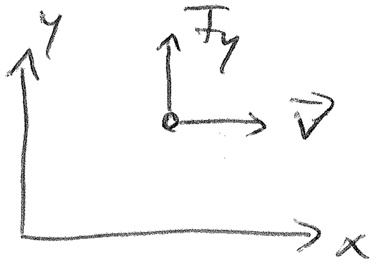
IS' (bewegt sich relativ zu IS mit v = const in x-Richtung)

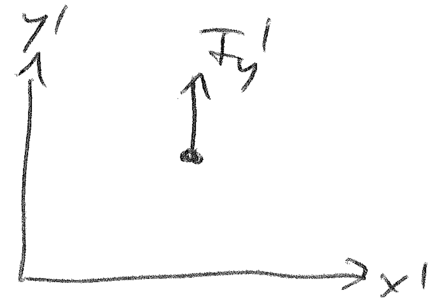


Berechnung von $\vec{F}'$? Resultat:

$$\boxed{\vec{F}' = \gamma\vec{F} = q\,\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\gamma}} \qquad (\vec{F}' = \gamma\vec{F})$$

Variante 1: Lorentz-Transformation von $\vec{F}$





es gilt:

$$F_y = \frac{dp_y}{dt}$$

$dp_y = dp_y'$, denn $p_y = p_y'$

weil

$$p^{\mu'} = \sum_\nu L^\mu_\nu\, p^\nu$$

$$\underline{L} = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

p_y: 3. Komponente von p

weiter:

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)$$

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)$$

also

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = \frac{dp_y'}{\gamma(dt' + v/c^2\, dx')} = \frac{dp_y'/dt'}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}$$

aber: $\frac{dx'}{dt'} = u_x' = 0$

$$\Rightarrow \quad F_y = \frac{1}{\gamma}\frac{dp_y'}{dt'} = \frac{1}{\gamma}F_y'$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_y' = \gamma F_y}$$

Variante 2: Direkte Rechnung in IS'

$\vec{B}' = 0 \quad , \quad E_y' = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \lambda' \cdot \frac{1}{r'}$

es ist

$$r' = r \qquad (r = y)$$

$$\lambda' = \frac{\Delta Q'}{\Delta L'} = \frac{\Delta Q}{\gamma \Delta L} = \frac{1}{\gamma} \lambda$$

$\left(\Delta L = \frac{1}{\gamma} \Delta L' < \Delta L' \, , \text{ Längenkontraktion} \right)$

$$\Rightarrow \quad F_y' = q E_y' = q \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\gamma} \lambda \frac{1}{r} \qquad \boxed{F_y' = \gamma F_y}$$

Variante 3: Transformation der Felder
(nur $E_y, B_z \neq 0$)

$$E_y' = \gamma E_y - \beta \gamma c B_z \qquad B_z' = \gamma B_z - \beta \gamma \frac{1}{c} E_y$$

$$E_y' = \gamma \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \lambda \frac{1}{r} - v \frac{\mu_0}{2\pi} \lambda v \frac{1}{r} \right)$$

$$= \gamma \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \lambda \frac{1}{r} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{1}{\gamma} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

$$B_z' = \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) = 0$$

also:

$$F_y' = q E_y' = q \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\gamma} \qquad \boxed{F_y' = \gamma F_y}$$