1.3 Elektrodynamik und Relativität

1.3.1 Kontinuitätsgleichung

betrachte Ladung $dq' = \rho' d^3r'$ in IS'

die Ladung befinde sich in Ruhe in IS'

es gilt:

also gilt für die Ruheladungsdichte ρ_0

weiter ist

definiere Viererstromdichte

es ist

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$$ Vierervektor

also:

kovariante Form der Kontinuitätsgleichung:

1.3.2 Potenziale

Potenzialgleichungen in Lorentz-Eichung:

$\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$

Lorenz – Bedingung

kovariante Form der Lorenz-Bedingung

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

in kovarianter Form?

1.3.3 Feldstärketensor

∂^μ, A^μ Vierervektoren

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \qquad A^\mu = \left(\frac{1}{c}\Phi, \vec{A}\right)$$

$\partial^\mu A^\nu$ Vierertensor (2. Stufe)

$$\left(\partial^\nu A^\mu\right) = \left(\partial^\mu A^\nu\right)^T = \left(\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} & & -\frac{1}{c}\vec{\nabla}\Phi & \\ \hline & -\frac{\partial}{\partial x}A_x & -\frac{\partial}{\partial y}A_x & \cdot \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial x}A_y & \cdot & \cdot \\ & -\frac{\partial}{\partial x}A_z & \cdot & -\frac{\partial}{\partial z}A_z \end{array}\right)$$

beachte: $\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)$

definiere:

kovariante Form des Zusammenhangs zwischen Potentialen und Feldern!

Antisymmetrie: $F^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$

($\rightarrow$ 6 unabhängige Elemente)

1.3.4 Eichfreiheit

Eichtransformation

$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$

$A^\mu = \left(\frac{1}{c}\Phi, \vec{A}\right)$

zusammen:

$\Lambda = \Lambda(\vec{r}, t) = \Lambda(x^\mu)$ (Vierer-) skalares Feld

Eichtransformationen lassen die Felder invariant:

(beachte: Das ist das Verhalten unter Eich- und nicht unter Lorentz-Transformationen!)

1.3.5 Maxwell-Gleichungen

es gilt:

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \qquad \mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Updownarrow$$

Potentialgleichungen, d.h. $\Box \underbrace{A^\mu}_{} = \mu_0 j^\mu$

eliminieren mittels
$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

liefert inhomogene Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form definiere:

es gilt:

allgemein:

damit:

Kovariante Form der inhomogenen Maxwell-Glgen.:

---

homogene Maxwell-Gleichungen?

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ (unphysikalisch)

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \operatorname{rot} (c\vec{B}) = \frac{\partial (\vec{E}/c)}{\partial t}$$

bzw. $\operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

(das sind die inhomogenen M.-Glgen für $\rho, \vec{j} = 0$)

also $\sum_\mu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$

also können die homogenen Maxwell-Gleichungen geschrieben werden als

mit $\tilde{F}^{\mu\nu}$: <u>dualer Feldstärketensor</u>

ergibt sich aus $F^{\mu\nu}$ durch $\vec{B} \leftrightarrow -\vec{B}$, $\vec{B} \leftrightarrow \vec{E}/c$

<u>E-Dynamik:</u>