

1.3 Elektrodynamik und Relativität

1.3.1 Kontinuitätsgleichung

betrachte Ladung $dq' = \rho' d^3r'$ in IS'
die Ladung befindet sich in Ruhe in IS'
es gilt:

also gilt für die Ruהלadungsdichte ρ_0

weiter ist

definiere Wasserstromdichte

es ist

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad \text{Vierervektor}$$

also:

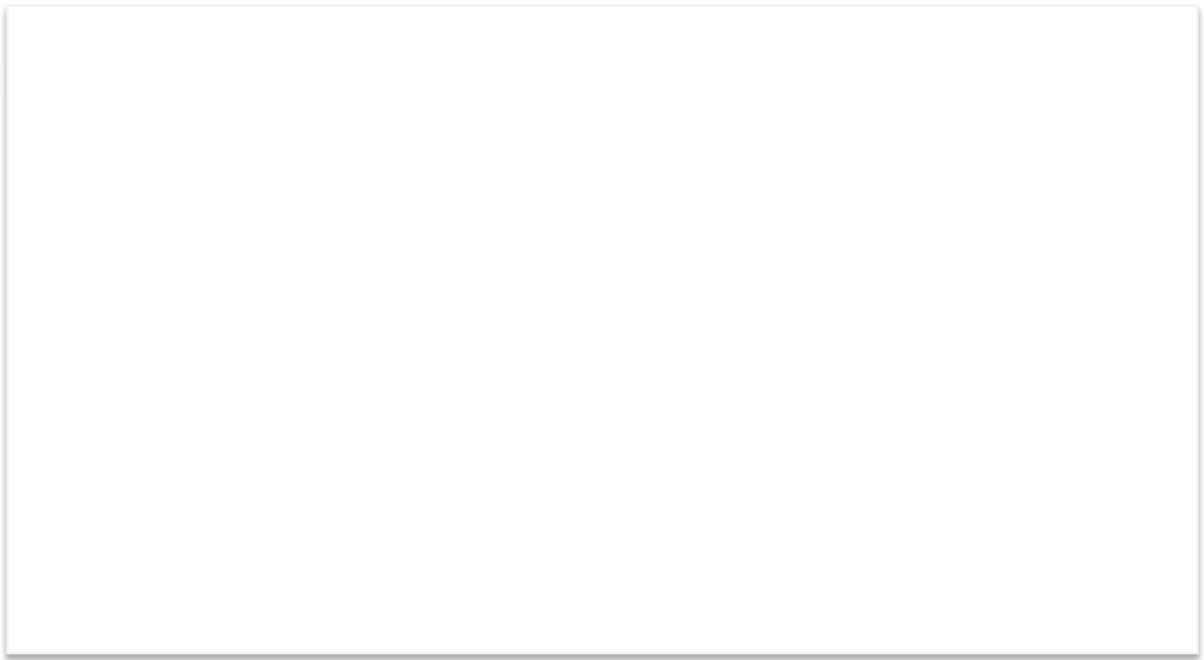
kovariante Form der Kontinuitätsgleichung:

1.3.2 Potenziale

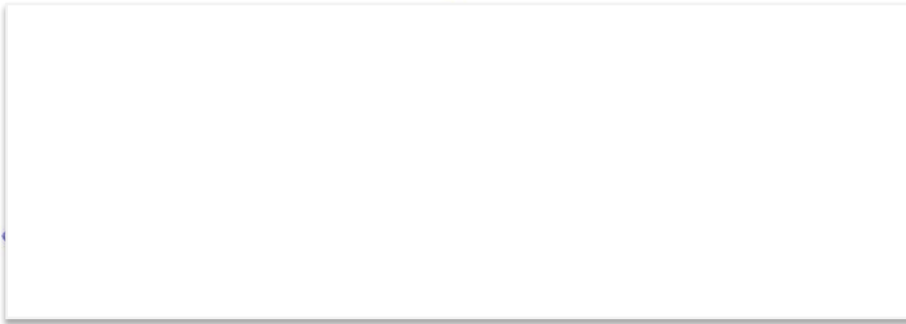
Potenzialgleichungen in Lorenz-Eichung:

\Leftrightarrow

\Leftrightarrow



Lorenz - Bedingung



Kovariante Form der Lorenz-Bedingung

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

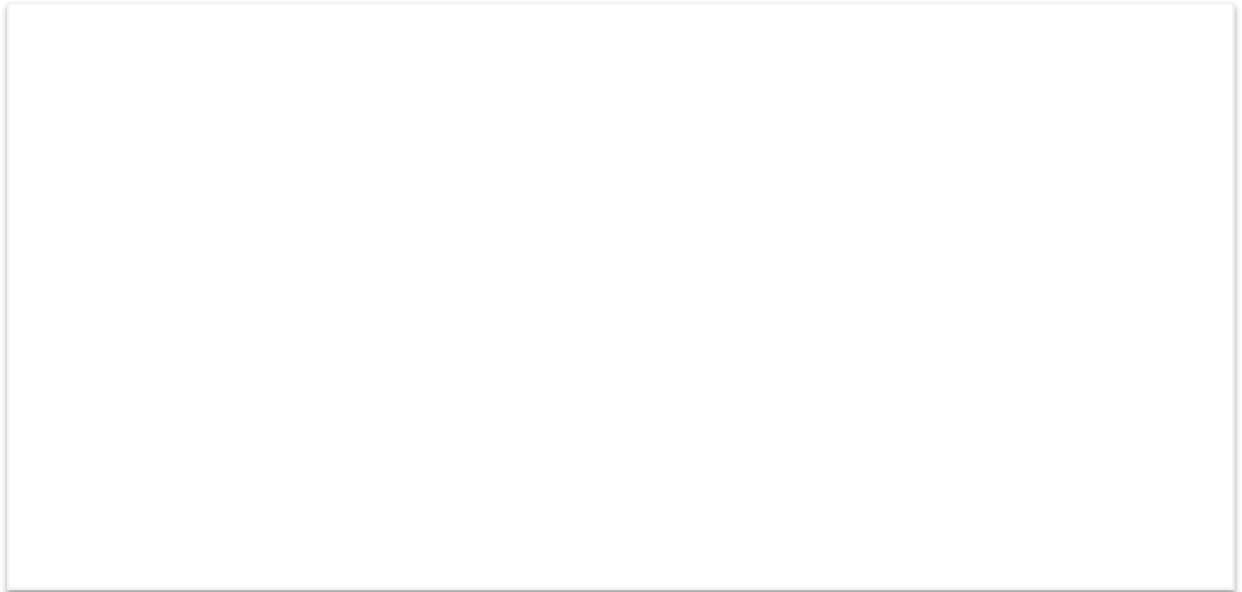
in kovarianter Form ?

1.3.3 Feldstärketensor

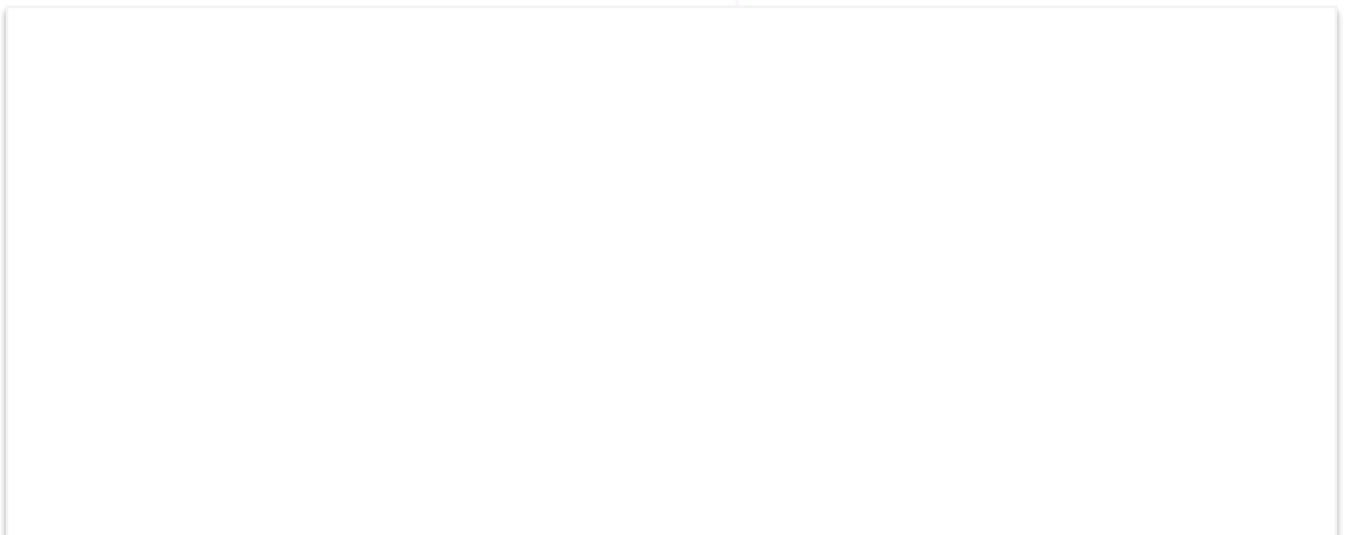
∂^μ, A^μ Vierervektoren

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad A^\mu = \left(\frac{1}{c} \Phi, \vec{A} \right)$$

$\partial^\mu A^\nu$ Vierertensor (2. Stufe)



$$(\partial^\nu A^\mu) = (\partial^\mu A^\nu)^T = \left(\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} & & & -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \Phi \\ \hline \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial x} A_x & -\frac{\partial}{\partial y} A_x & \\ & -\frac{\partial}{\partial x} A_y & \cdot & \\ & -\frac{\partial}{\partial x} A_z & \cdot & -\frac{\partial}{\partial z} A_z \end{array} \right)$$



beachte: $\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)$

definiere:

Kovariante Form des
Zusammenhangs
zwischen Potentialen
und Feldern!

Antisymmetrie: $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$
(\rightarrow 6 unabhängige Elemente)

1.3.4 Eichfreiheit

Eichtransformationen

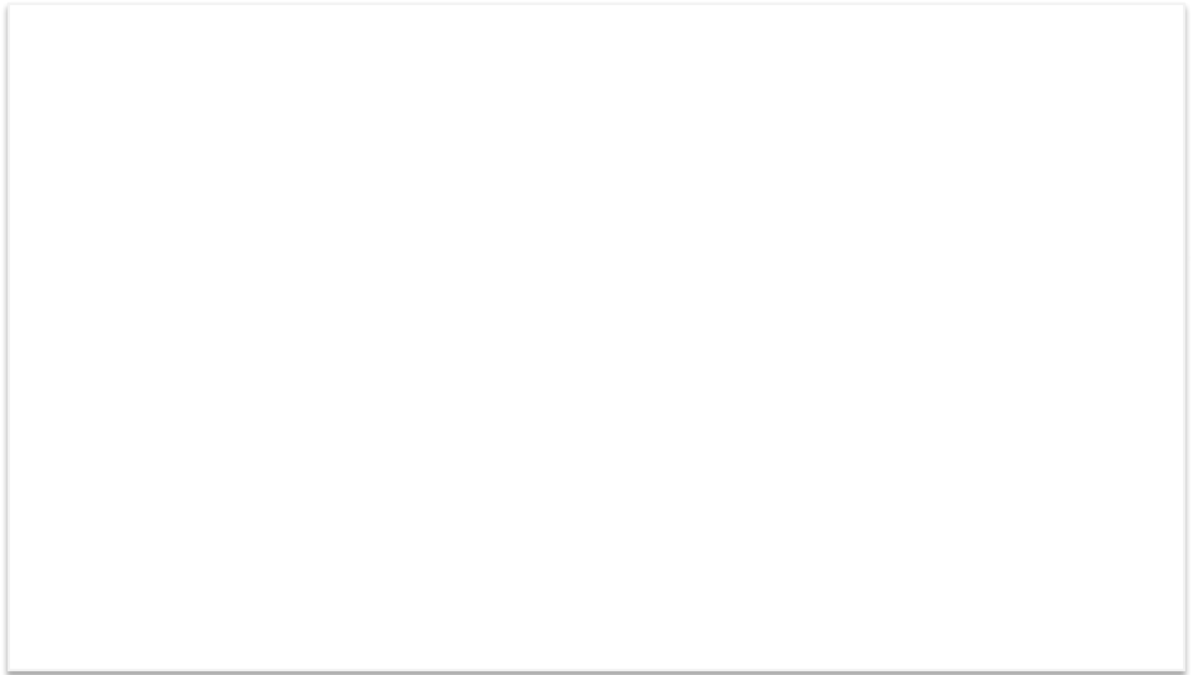
$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$$

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c} \Phi, \vec{A} \right)$$

Zusammen:

$\Lambda \equiv \Lambda(\vec{r}, t) = \Lambda(x^\mu)$ (Vier-)skalares Feld

Eichtransformationen lassen die Felder invariant;



(beachte: Das ist das Verhalten unter Eich- und nicht unter Lorentz-Transformationen!)

1.3.5 Maxwell-Gleichungen

es ist:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



Potentialgleichungen, d.h. $\square A^\mu = \mu_0 j^\mu$

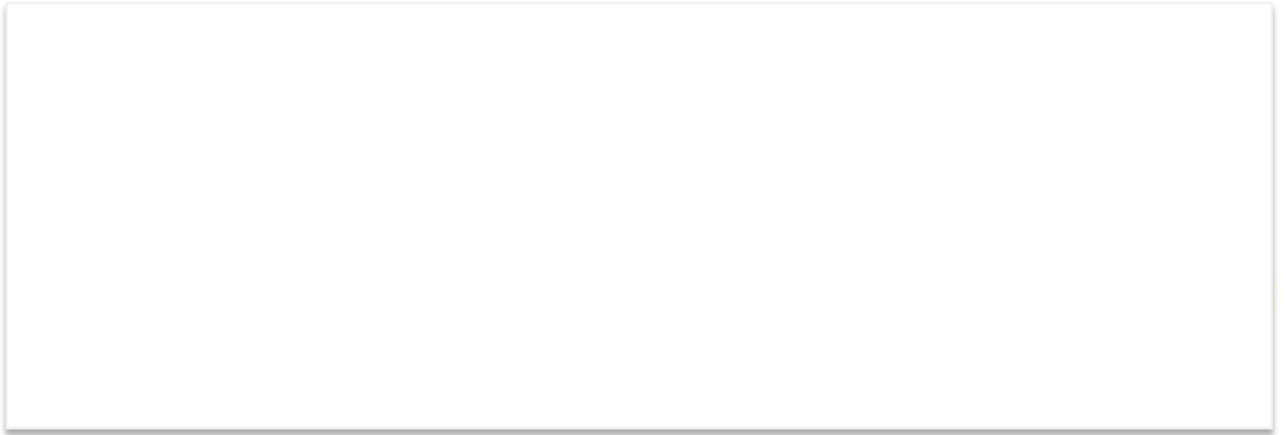


eliminieren mittels

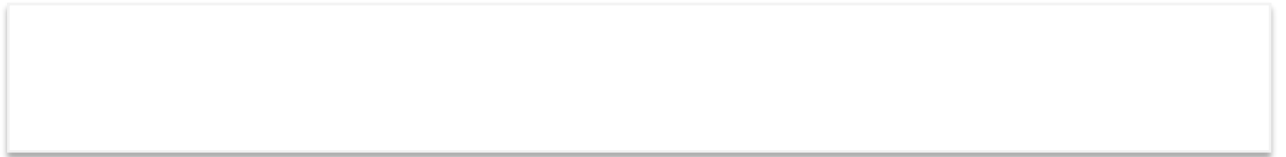
$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

liefert inhomogene Maxwell-Gleichungen
in kovarianter Form

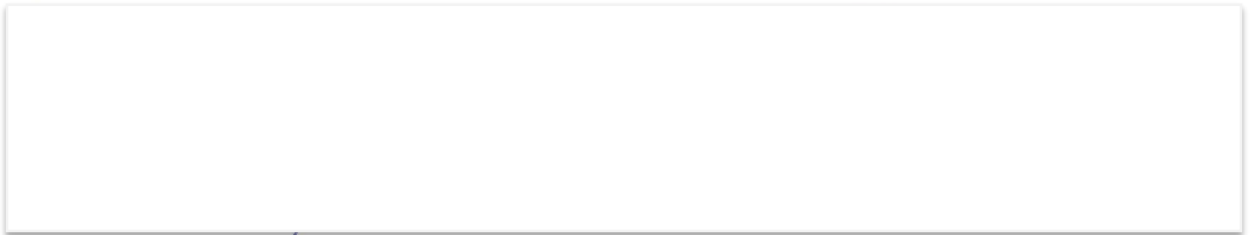
definiere:



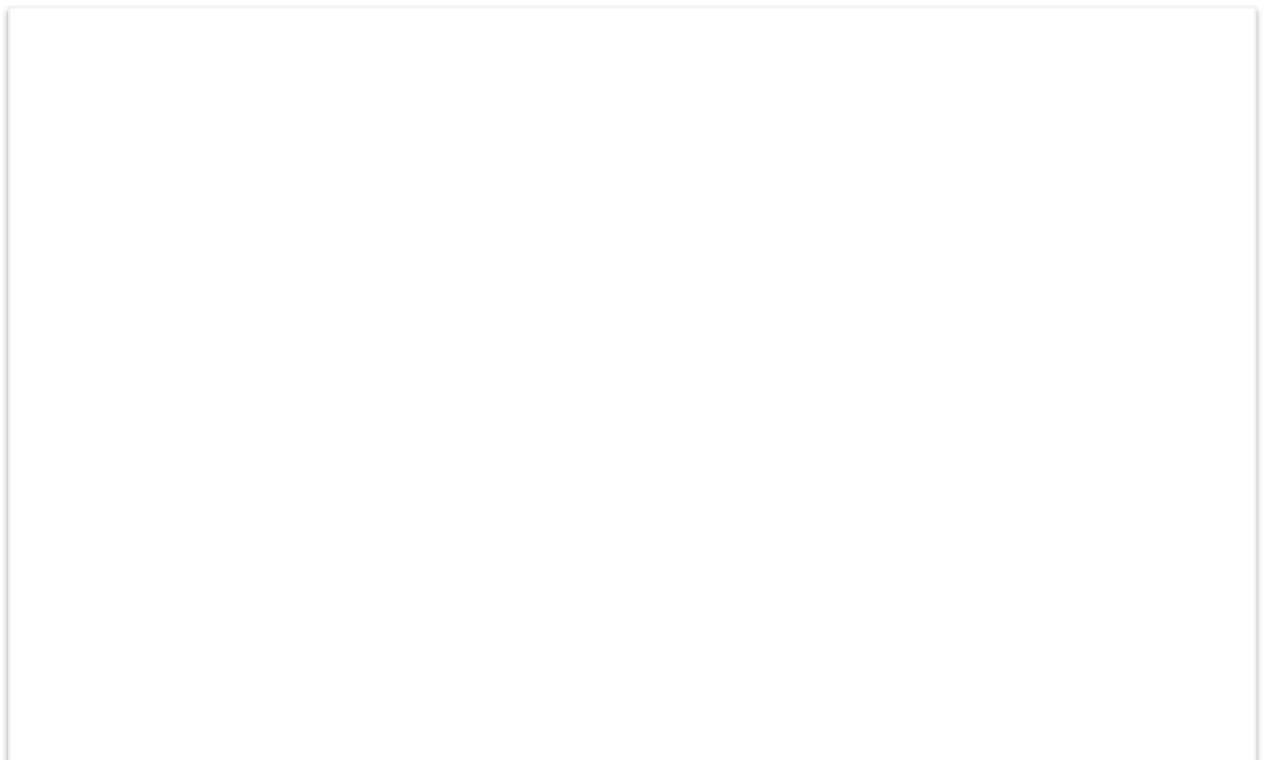
es gilt:



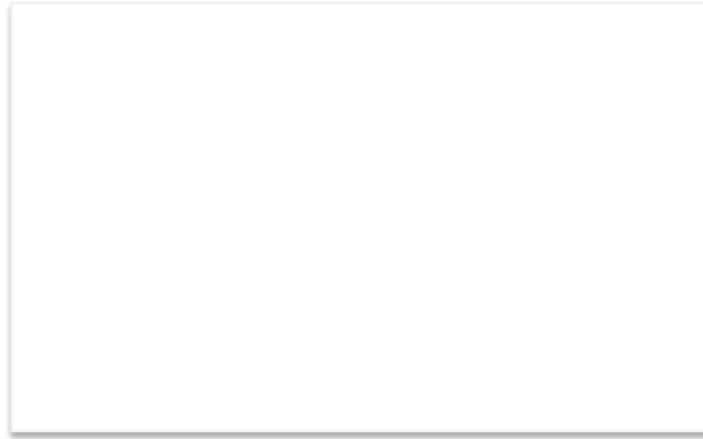
allgemein:



damit:

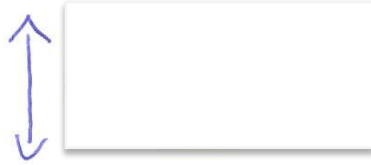


Kovariante Form der inhomogenen Maxwell-Glgen.:

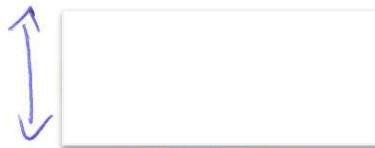


homogene Maxwell-Gleichungen?

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{unphysikalisch})$$



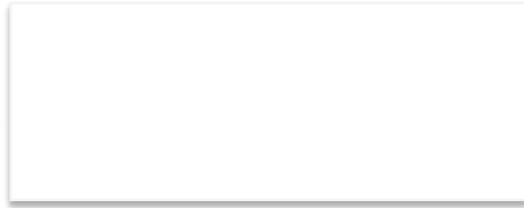
$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \operatorname{rot}(c\vec{B}) = \frac{\partial(\vec{E}/c)}{\partial t}$$

$$\text{bzw.} \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

(das sind die inhomogenen M-Glgen für $\rho, \vec{J} = 0$)

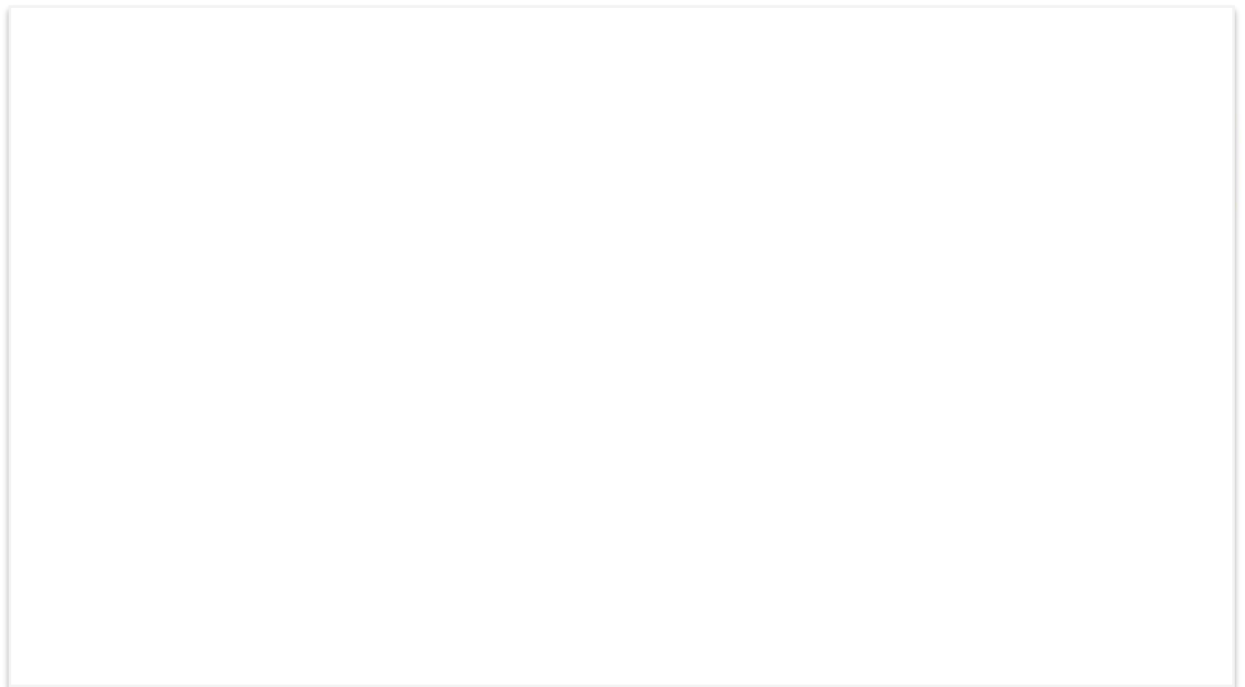
$$\text{also} \quad \sum_{\mu} \partial_{\mu} F^{\mu\nu} = 0$$

also können die homogenen Maxwell-Gleichungen geschrieben werden als



mit $\tilde{F}^{\mu\nu}$: duales Feldstärketensor

ergibt sich aus $F^{\mu\nu}$ durch $\vec{B} \leftrightarrow -\vec{B}$, $\vec{E} \leftrightarrow \vec{E}/c$



E-Dynamik:

