10 Relativistische Feldtheorie

10.1 Vierer-Tensoren

Postulat der speziellen Relativitätstheorie:

Physikalische Gesetze sind forminvariant unter Transformationen der

Poincaré-Gruppe:

1 Zeittranslationen

3 räumliche Translationen

3 räumliche Drehungen

3 spezielle Lorentz-Trsf.

---

10 Parameter

wie bei der Galilei-Gruppe (ohne spez. Gal.-Trsf.)

Lorentz-Gruppe (lässt 0 invariant)

spezielle Lorentz-Transformation:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

$$\beta = v/c \qquad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$x'^0 = \gamma\,(x^0 - \beta x^1)$$

$$x'^1 = \gamma\,(x^1 - \beta x^0)$$

oder:

$$\boxed{x'^{\mu} = \sum_{\nu} L^{\mu}_{\ \nu}\, x^{\nu}} \qquad \mu = 0,1,2,3$$

mit der Lorentz-Transformationsmatrix

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

allgemeine Relativgeschwindigkeit $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ \cdot & 1+(\gamma-1)\beta_1^2/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_1\beta_2/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_1\beta_3/\beta^2 \\ \cdot & \cdot & 1+(\gamma-1)\beta_2^2/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_2\beta_3/\beta^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1+(\gamma-1)\beta_3^2/\beta^2 \end{pmatrix}$$

$\underline{L}^T = \underline{L}$

Def.: <u>metrischer Tensor</u>

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

es gilt (einfaches Nachrechnen)

$$\boxed{\underline{L}\, \underline{g}\, \underline{L} = \underline{g}}$$

Def: <u>Minkowski-Skalarprodukt</u>

$$x \circ y = \sum_{\mu\nu} x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu$$

- bilinear
- symmetrisch
- indefinit $\Longrightarrow$ $x \circ x > 0$ "zeitartig"

  $x \circ x < 0$ "raumartig"

es gilt: $\boxed{x' \circ y' = x \circ y}$

Def: Für ein Ereignis x heißen x^μ die <u>kontravarianten Komponenten</u> von x

Def: $\boxed{x_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu}$ (verallgemeinertes Transponieren)

x_μ heißen die <u>kovarianten Komponenten</u> von x

x^μ : Spalte $\qquad$ x_μ : Zeile

x^μ : Vektor $\qquad$ x_μ : dualer Vektor

es gilt

$$x \circ y = \sum_{\mu\nu} x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = \sum_\mu x^\mu y_\mu$$

$$= \sum_{\mu\nu} y^\nu g_{\nu\mu} x^\mu = \sum_\mu x_\mu y^\mu$$

g symmetrisch

Def: $\boxed{g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}}$

es gilt:

$$\sum_\nu g^{\mu\nu} x_\nu = \sum_\nu g^{\mu\nu} \sum_\rho g_{\nu\rho} x^\rho = \sum_\rho \Big(\sum_\nu g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} \Big) x^\rho$$

$$= \sum_\rho \delta^\mu_\rho x^\rho = x^\rho \quad , \text{ also:}$$

$$\boxed{x^\mu = \sum_\nu g^{\mu\nu} x_\nu}$$

Def: 4 phys. Größen $A^0, \vec{A}$, d.h. A^μ ($\mu = 0,1,2,3$) bilden die kontravarianten Komponenten eines <u>Vierer-Vektors</u>

(kurz: "<u>kontravarianter Vierer-Vektor</u>"), falls

$$\boxed{A'^\mu = \sum_\nu L^\mu_\nu A^\nu}$$

bei Lorentz-Transformationen L

A_μ mit Transformationsverhalten

$$\boxed{A'_\mu = \sum_\nu \bar{L}^\nu_\mu A_\nu} \qquad (\bar{L} = L^{-1})$$

heißt <u>kovarianter Vierer-Vektor</u>

es gilt:

$$A^\mu = \sum_\nu g^{\mu\nu} A_\nu \quad , \quad A_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} A^\nu$$

z.B. ist

$$\sum_\nu \bar{L}^\nu_\mu A_\nu = \sum_{\nu\rho} \bar{L}^\nu_\mu g_{\nu\rho} A^\rho = \sum_{\nu\rho\sigma} \bar{L}^\nu_\mu g_{\nu\rho} \bar{L}^\rho_\sigma A'^\sigma$$

$$= \sum_\sigma \underbrace{\Big(\sum_{\nu\rho} \bar{L}^\nu_\mu g_{\nu\rho} \bar{L}^\rho_\sigma \Big)}_{g_{\mu\sigma}} A'^\sigma = \sum_\sigma g_{\mu\sigma} A'^\sigma$$

$$= A'_\mu \quad ✓$$

oder:

$$\sum_\mu A'^\mu A'_\mu = \sum_{\mu\rho\sigma} L^\mu_\rho A^\rho \bar{L}^\sigma_\mu A_\sigma = \sum_{\rho\sigma} \delta^\sigma_\rho A^\rho A_\sigma = \sum_\rho A^\rho A_\rho \quad ✓$$

es gilt:

$$A^\mu = (A^0, \vec{A}) \Rightarrow A_\mu = (A_0, -\vec{A})$$
$$(A_0 = A^0)$$

<u>Def</u>: Eine unter Lorentz-Transformationen invariante Größe heißt <u>Vierer-Skalar</u>

$$\boxed{A' = A}$$

Bsp.: $\sum_\mu A_\mu B^\mu = A \circ B$

---

sei $f(x^0, .., x^3)$ eine skalare Funktion, $f' = f$, dann ist df ebenfalls ein Skalar (Vierer-Skalar) und es gilt:

$$df = \sum_\mu \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^\mu}}_{\text{kovarianter Vierer-Vektor}} \cdot \underbrace{dx^\mu}_{\text{kontravarianter Vierer-Vektor}} \quad \text{Skalar}$$

Schreibweise

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \\ \partial^\mu &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \end{aligned}}$$

$$\Box = \sum_\mu \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

kovariante Form physikalischer Gesetze:

$$A = B\,,\quad A^\mu = B^\mu\,,\quad A_\mu = B_\mu$$

(Gleichheit zwischen Vierer-Tensoren gleicher Stufe)

Tensor 2. Stufe:

kontravariant

$$A^{\mu\nu} \qquad \left(A'^{\mu\nu} = \sum_{\rho\sigma} L^\mu{}_\rho\, L^\nu{}_\sigma\, A^{\rho\sigma} \right)$$

kovariant

$$A_{\mu\nu} \qquad \left(A'_{\mu\nu} = \sum_{\rho\sigma} \bar{L}^\rho{}_\mu\, \bar{L}^\sigma{}_\nu\, A_{\rho\sigma} \right)$$

gemischt

$$A^\mu{}_\nu \qquad \left(A'^\mu{}_\nu = \sum_{\rho\sigma} L^\mu{}_\rho\, \bar{L}^\sigma{}_\nu\, A^\rho{}_\sigma \right)$$

$$A_\mu{}^\nu \qquad \left(A'_\mu{}^\nu = \sum_{\rho\sigma} \bar{L}^\rho{}_\mu\, L^\nu{}_\sigma\, A_\rho{}^\sigma \right)$$

Transformationsverhalten kompatibel mit "Rauf- und Runterziehen" der Indizes:

$$A_{\mu\nu} = \sum_{\rho\sigma} g_{\mu\rho}\, g_{\nu\sigma}\, A^{\rho\sigma}$$

$$A_\mu{}^\nu = \sum_\sigma g_{\mu\sigma}\, A^{\sigma\nu} \qquad \text{etc.}$$

Tensorprodukt

A^μ, B^μ, C_μ Vektoren $\Rightarrow$ $A^\mu B^\nu$, $A^\mu C_\nu$ Tensoren

Verjüngung

$A^{\mu\nu}$ Tensor $\Rightarrow$ $\sum_\mu A^\mu{}_\mu$ Skalar

$A^{\mu\nu\rho}$ Tensor 3. Stufe, $B^{\mu\nu}$ Tensor 2. Stufe

$\Rightarrow$ $\sum_{\nu\rho} A^{\mu\nu\rho} B_{\nu\rho}$ kontravarianter Vektor

$A^{\mu\nu}, B^{\mu\nu}$ $\Rightarrow$ $\sum_{\mu\nu} A^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$ Skalar

$A^{\mu\nu}, B^\mu$ $\Rightarrow$ $\sum_{\nu} A^{\mu\nu} B_\nu$ Vektor (kontravar.)

$\sum_{\nu} A_{\mu\nu} B^\nu$ Vektor (kov.)

Tensor k-ter Stufe

$A^{\mu_1 \cdots \mu_k}$, $A^{\mu_1\mu_2}{}_{\mu_3}{}^{\mu_4 \cdots}{}_{\cdots \mu_k}$

symmetrischer Tensor 2. Stufe:

$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$, es folgt: $A^\mu{}_\nu = \sum_\rho A^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \sum_\rho g_{\nu\rho} A^{\rho\mu} = A_\nu{}^\mu$

$A^\mu{}_\nu = A_\nu{}^\mu =: A^\mu_\nu$ (für sym. Tensoren)

$A^\mu{}_\mu = A_\mu{}^\mu$ (gilt immer)

$\delta^\mu_\nu := \sum_\rho g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad \delta^\mu_\nu = g^\mu{}_\nu = g_\nu{}^\mu$

sei

$$(A^{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|c} A^{00} & (A^{0j}) \\ \hline (A^{i0}) & (A^{ij}) \end{array}\right) \qquad i,j = 1,2,3$$

dann ist $A_\mu{}^\nu = \sum_\rho g_{\mu\rho} A^{\rho\nu}$, also:

$$(A_\mu{}^\nu) = \left(\begin{array}{c|c} A^{00} & (A^{0j}) \\ \hline -(A^{i0}) & -(A^{ij}) \end{array}\right)$$

und $A^\mu{}_\nu = \sum_\rho A^{\mu\rho} g_{\rho\nu}$, also:

$$(A^\mu{}_\nu) = \left(\begin{array}{c|c} A^{00} & -(A^{0j}) \\ \hline (A^{i0}) & -(A^{ij}) \end{array}\right)$$

und

$$(A_{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|c} A^{00} & -(A^{0j}) \\ \hline -(A^{i0}) & (A^{ij}) \end{array}\right)$$

---

total antisymmetrischer Tensor 4. Stufe

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & (\mu\nu\rho\sigma) \text{ ist gerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ -1 & (\mu\nu\rho\sigma) \text{ ist ungerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beachte $\varepsilon^{0123} = +1 \qquad \varepsilon_{0123} = -1$

$\delta^\mu_\nu,\ g^{\mu\nu},\ g_{\mu\nu},\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma},\ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ haben in allen IS die gleichen Werte!

10.2 Zusammenstellung von Vierer-Tensoren

1) Eigenzeit (differenzial)

$$d\tau = \frac{1}{\gamma}\, dt \qquad \left(\text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ und}\right.$$

$$\left. v: \text{Teilchengeschwindigkeit}\right)$$

2) Vierer-Geschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma\,(c, \vec{u}) \qquad \vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$\sum_\mu u_\mu u^\mu = c^2$$

3) Vierer-Beschleunigung

$$b^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

4) Vierer-Impuls

$$p^\mu = m u^\mu \qquad m: \text{Ruhemasse (Skalar)}$$

$$p^\mu = (m\gamma c, m\gamma\vec{u}) = (E/c, \vec{p})$$

$$\vec{p} = m\gamma\vec{u} \qquad (!)$$

$$\sum_\mu p_\mu p^\mu = m^2c^2 \iff E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$$

5) Minkowski-Kraft

$$K^\mu = m\, b^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}\left(E/c, \vec{p}\right) = (K^0, \vec{K})$$

$$K^0 = \gamma \frac{\vec{F}\vec{u}}{c} \qquad \vec{K} = \gamma \vec{F} \qquad \text{mit } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (?)$$

6) Vierer-Stromdichte

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}) = (c\gamma\rho_0, \gamma\rho_0\vec{u})$$

$$= \rho_0 \gamma (c, \vec{u}) = \rho_0 u^\mu$$

ρ_0 : Ruheladungsdichte

Kontinuitätsgleichung : $\sum_\mu \partial_\mu j^\mu = 0$

7) Vierer-Potential

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c}\Phi, \vec{A}\right) \qquad \sum_\mu \partial_\mu A^\mu = 0$$

entkoppelte Potentialgleichungen: Lorentz-Eichung

$$\Box A^\mu = \mu_0 j^\mu$$

8) Lorentz-Kraft

$$K^\mu = q \cdot \sum_\nu F^{\mu\nu} u_\nu$$

9) Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & -\vec{E}/c & \\ \hline \vec{E}/c & 0 & -B_z & B_y \\ & & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{array}\right) = -F^{\nu\mu}$$

$$F_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & \vec{E}/c & \\ \hline -\vec{E}/c & 0 & -B_z & B_y \\ & & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{array}\right) = -F_{\nu\mu}$$

inhomogene Maxwell-Gleichungen: $\sum_\mu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$

10) dualer Feldstärketensor

es gilt

$\partial^\sigma F^{\mu\nu}$ + zykl. Vertauschungen

$= \partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma}$

$= \partial^\sigma \partial^\mu A^\nu - \partial^\sigma \partial^\nu A^\mu + \partial^\nu \partial^\sigma A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu A^\sigma + \partial^\mu \partial^\nu A^\sigma - \partial^\mu \partial^\sigma A^\nu$

$= 0$

und somit

$$\sum_{\sigma\mu\nu} \partial^\sigma F^{\mu\nu} \cdot \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu} = 0 \qquad (\varepsilon_{0123} = -1 !)$$

definiere: dualer Feldstärketensor

$$\tilde{F}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

denn gilt

$$\sum_\sigma \partial^\sigma \tilde{F}_{\rho\sigma} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_\sigma \partial_\sigma \tilde{F}^{\rho\sigma} = 0$$

bzw. (wegen Antisymmetrie)

$$\sum_\mu \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad \text{, homogene Maxwell-Gleichungen}$$

es ist

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & -\vec{B} & \\ \hline & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ \vec{B} & \cdot & 0 & E_x/c \\ & \cdot & \cdot & 0 \end{array}\right)$$

11) Eichfreiheit

$$A^\mu \mapsto A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu} &= \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu \chi + \partial^\nu \partial^\mu \chi \\ &= F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

F invariant unter Eichtransformationen des Potentials

sei A^μ gegeben, wähle χ als Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\Box \chi = \sum_\mu \partial_\mu A^\mu$

dann ist $\sum_\mu (\partial_\mu \partial^\mu \chi - \partial_\mu A^\mu) = 0$, also mit

$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$: $\quad \sum_\mu \partial_\mu A'^\mu = 0$ (Lorenz-Eichung)

12) Verjüngung des Feldstärketensors

$$\sum_{\mu\nu} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \frac{\vec{E}^2}{c^2} + 2(B_z^2 + B_y^2 + B_x^2)$$

$$= 2\left(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{E}^2\right) = -\sum_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$$

$$(F^{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & -\vec{E}/c & \\ \hline \vec{E}/c & 0 & -B_z & B_y \\ & & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{array}\right) \qquad (F_{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & \vec{E}/c & \\ \hline -\vec{E}/c & 0 & -B_z & B_y \\ & & 0 & -B_x \\ & & & 0 \end{array}\right)$$

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & -\vec{B} & \\ \hline \vec{B} & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ & & 0 & E_x/c \\ & & & 0 \end{array}\right) \qquad (\tilde{F}_{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & \vec{B} & \\ \hline -\vec{B} & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ & & 0 & E_x/c \\ & & & 0 \end{array}\right)$$

$$\sum_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = -\frac{1}{c}\vec{E}\vec{B} - \frac{1}{c}\vec{E}\vec{B} - \frac{1}{c}(E_z B_z + \cdots + E_z B_z + \cdots)$$

$$= -\frac{4}{c}\vec{E}\vec{B}$$

10.3 Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Felds

Ableitung der Maxwell-Gleichungen aus $\delta S = 0$?

$$S = \int dt \int d^3r \, \mathcal{L} = \frac{1}{c} \int d^4x \, \mathcal{L}$$

es gilt

$$d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{\partial(x^0, \vec{r})}{\partial(x'^0, \vec{r}\,')} \, d^4x'$$

$$= \det \underline{L} \, d^4x'$$

$$= \det \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} d^4x'$$

$$= (\gamma^2 - \beta^2\gamma^2) \, d^4x' = \gamma^2(1-\beta^2) \, d^4x' = d^4x'$$

$$\boxed{d^4x = d^4x'} \quad \text{Skalar}$$

beachte: falls $\mathcal{L}$ ein Skalar ist, ist $\delta S = 0$ kovariant unter der Bedingung, dass $\mathcal{L} = \mathcal{L}$ (Vierer-Tensoren)

z.B. $\mathcal{L} = \mathcal{L}(F^{\mu\nu}, \ldots)$ oder $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A^\mu, \ldots)$

- $\mathcal{L}$ skalar $\rightsquigarrow$ $\mathcal{L} \sim \sum_{\mu\nu} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, $\sum_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$

- für $\mathcal{L} = \mathcal{L}(F^{\mu\nu})$ treten keine Ableitungen auf !?

- besser: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A^\mu, \partial^\mu A^\nu, \ldots)$

- Feldgleichungen für A^μ $\Longleftrightarrow$ inhomogene Maxwell-Gleichungen

homogene Maxwell-Gleichungen $\sum_\mu \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$
sind mit $\tilde{F}^{\mu\nu} = \sum_{\rho\sigma} \varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu} F_{\rho\sigma}$ und mit
$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ trivial erfüllt

- $\mathcal{L}(A^\mu, \ldots) = \text{const} \cdot \sum_{\mu\nu} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$
in Abwesenheit von Quellen j^μ

- Kopplung zwischen Quellen j^μ und Feld A^μ:
einfachster Skalar: $\text{const} \sum_\mu j_\mu A^\mu$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Feld} + \mathcal{L}_{WW}$$

$$\mathcal{L}_{Feld} = -\frac{1}{4\mu_0} \sum_{\mu\nu} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

$$\mathcal{L}_{WW} = -\sum_\mu j_\mu A^\mu$$

denn $j^\mu = j^\mu(x^\nu)$

also $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A^\mu, \partial^\mu A^\nu, x^\mu)$

$$0 = \delta S = \int d^4x \, \delta \mathcal{L}$$

$$= \int d^4x \left(\sum_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} \delta A^\nu - \sum_{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} \delta \partial^\mu A^\nu \right)$$

$$= \int d^4x \sum_\nu \delta A^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} - \sum_\mu \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} \right)$$

Feldgleichungen:

$$\boxed{0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} - \sum_\mu \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)}}$$

beachte: $\mathcal{L}$ Skalar $\rightarrow$ Feldgleichungen kovariant

---

es ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = -j_\nu$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = -\frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} \sum_{\rho\sigma} (\overset{1}{\partial^\rho A^\sigma} - \overset{2}{\partial^\sigma A^\rho})(\overset{3}{\partial_\rho A_\sigma} - \overset{4}{\partial_\sigma A_\rho})$$

$$= -\frac{1}{4\mu_0} \Big((\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) + (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

$$- (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) \Big)$$

$$= -\frac{1}{4\mu_0} \cdot 4 \cdot (\partial_\mu A_0 - \partial_0 A_\mu) = -\frac{1}{\mu_0} F_{\mu 0}$$

zusammen gilt also:

$$0 = -j_0 - \sum_\mu \partial^\mu \left(-\frac{1}{\mu_0}\right) F_{\mu 0}$$

bzw.:

$$\sum_\mu \partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 j^0 \qquad (\checkmark)$$

als Gleichung für die Potenziale:

$$\sum_\mu \partial_\mu (\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu) = \mu_0 j^0$$

$$\underbrace{\left(\sum_\mu \partial_\mu \partial^\mu\right)}_{\Box} A^0 - \partial^0 \underbrace{\sum_\mu \partial_\mu A^\mu}_{= 0 \text{ in Lorenz-Eichung}} = \mu_0 j^0$$

also:

$$\Box A^\mu = \mu_0 j^\mu$$

(inhomogene Wellengleichung)

Nichtrelativistische Rechnung:

es ist

$$\mathcal{L}_{Feld} = -\frac{1}{4\mu_0} \sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$\overset{\text{siehe oben}}{=} -\frac{1}{4\mu_0}\, 2\left(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{E}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\vec{\nabla}\Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2\mu_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)^2$$

mit:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

weiter gilt

$$\mathcal{L}_{WW} = -\sum_{\mu} j_\mu A^\mu \qquad A^\mu = \left(\tfrac{1}{c}\Phi, \vec{A}\right)$$

$$= -\rho\Phi + \vec{J}\vec{A} \qquad j^\mu = (c\rho, \vec{J})$$

$$j_\mu = (c\rho, -\vec{J})$$

also ist $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Feld} + \mathcal{L}_{WW}$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\Phi, \vec{A}, \partial\Phi/\partial t, \partial\vec{A}/\partial t, \vec{\nabla}\Phi, \vec{\nabla}A_i, \vec{r}, t\right)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\vec{\nabla}\Phi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2\mu_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)^2 - \rho\Phi + \vec{J}\vec{A}$$

Ableitung der Potenzialgleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = -\rho \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla}\Phi} = \varepsilon_0 \left(\vec{\nabla}\Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Phi)} = 0 \qquad \text{d.h. } \pi_\Phi = 0 \quad !$$

---

in der N-Teilchen-Punktmechanik war $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0$ ausgeschlossen, denn dies impliziert, dass q_n keine notwendige Koordinate zur Festlegung der Teilchenpositionen (kompatibel mit den ZB) ist

hier: $\pi_\Phi = 0$ drückt die Eichfreiheit in der Wahl der Potenziale aus, die erst durch eine Eichbedingung (z.B. Lorenz-Eichung) eindeutig bestimmt werden können

→ Probleme (aber nur) in der QFT

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{A}} = \vec{j} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \vec{A})} = \varepsilon_0 \left(\vec{\nabla}\Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla} A_i)} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \vec{A} - \vec{\nabla} A_i \right) \qquad (*)$$

(*) es gilt

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2 = \left(\sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_i A_j \vec{e}_k\right)^2$$

$$= \sum_k \sum_{iji'j'} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{i'j'k} (\partial_i A_j)(\partial_{i'} A_{j'})$$

$$= \sum_{iji'j'} \underbrace{\left(\sum_k \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{i'j'k}\right)}_{\substack{\neq 0 \text{ nur für } i=i' \text{ und } j=j' \\ \text{oder } i=j' \text{ und } j=i'}} (\partial_i A_j)(\partial_{i'} A_{j'})$$

$$= \sum_{ij} \sum_{i'j'} \left(\delta_{ii'}\delta_{jj'} - \delta_{ij'}\delta_{ji'}\right)(\partial_i A_j)(\partial_{i'} A_{j'})$$

$$= \sum_{ij} \left[(\partial_i A_j)(\partial_i A_j) - (\partial_i A_j)(\partial_j A_i)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i A_j)} = \left(-\frac{1}{2\mu_0}\right)\left[2\,\partial_i A_j - 2\,\partial_j A_i\right]$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left(\partial_j A_i - \partial_i A_j\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla} A_j)} = \frac{1}{\mu_0}\left(\partial_j \vec{A} - \vec{\nabla} A_j\right) \quad \checkmark$$

Feldgleichungen:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \frac{d}{d\vec{r}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \Phi)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \Phi)}$$

$$= -\rho - \frac{d}{d\vec{r}} \varepsilon_0 \left(\vec{\nabla} \Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$= -\rho - \varepsilon_0 \Delta \Phi - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \vec{A}$$

Lorentz-Eichung

$$\sum_\mu \partial_\mu A^\mu = \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{A} = 0$$

damit folgt:

$$0 = -\rho - \varepsilon_0 \Delta \Phi + \varepsilon_0 \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi$$

bzw.

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \Phi = \rho / \varepsilon_0 \qquad \checkmark$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \frac{d}{d\vec{r}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} A_i)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t A_i)}$$

$$= j_i - \frac{d}{d\vec{r}} \left(\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{A} - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} A_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} A_i \right)$$

$$= j_i - \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{\mu_0}\Delta A_i - \frac{1}{\mu_0 c^2}\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0 c^2}\frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2}$$

also

$$0 = \vec{j} - \frac{1}{\mu_0}\Big(\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \Delta\vec{A} + \underbrace{\frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\frac{\partial\Phi}{\partial t}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\Big)$$

mit der Lorenz-Bedingung: $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A})$

und somit

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A} = \mu_0\vec{j} \qquad \checkmark$$

---

beachte:

$$\int d^3r\, \mathcal{L}_{ww} = \int d^3r\left(-\rho\Phi + \vec{j}\vec{A}\right) = L_{ww}$$

für N Punktteilchen ist

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_i q_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$
$$\vec{j}(\vec{r},t) = \sum_i q_i\, \dot{\vec{r}}_i(t)\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

und damit:

$$L_{ww} = \sum_i q_i\left[-\Phi(\vec{r}_i(t),t) + \dot{\vec{r}}_i(t)\,\vec{A}(\vec{r}_i(t),t)\right]$$

→ konsistent mit der Lagrange-Funktion eines Teilchens im elektromagnetischen Feld

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\,\Phi(\vec{r},t) + q\,\dot{\vec{r}}\,\vec{A}(\vec{r},t)$$

Elektrodynamik plus nichtrelativistische Mechanik von N Punktteilchen:

$$\boxed{\delta S = 0}$$

$$S = S_{Feld} + S_{ww} + S_{Teilchen}$$

mit

$$S_{Feld} = \int dt \int d^3r \; \mathcal{L}_{Feld} \qquad \mathcal{L}_{Feld}: \text{s.o.}$$

$$S_{Teilchen} = \int dt \; L_{Teilchen} \qquad L_{Teilchen} = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

Wechselwirkungsterm:

$$S_{ww} = \int dt \; L_{ww} = \int dt \int d^3r \; \mathcal{L}_{ww}$$

aus Teilchensicht:

(LI für die N Teilchen im gegebenen Feld)

$$L_{ww} = \sum_{i=1}^{N} q_i \left[\Phi(\vec{r}_i, t) + \dot{\vec{r}}_i \vec{A}(\vec{r}_i, t) \right]$$

aus Feldsicht:

(Feldgleichung für Φ, $\vec{A}$ bei gegebenen Quellen)

$$\mathcal{L}_{ww} = -\rho \Phi + \vec{j}\vec{A} = -\sum_\mu j_\mu A^\mu$$

10.4 Energie-Impuls-Tensor

betrachte eine Feldtheorie

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_f, \partial^\mu \varphi_1, \dots, \partial^\mu \varphi_f, x^\mu)$$

mit
$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0}$$

es gilt:

$$\frac{d}{dx^\mu} \mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{L} = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x^\mu} + \sum_{n,\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\sigma \varphi_n)} \frac{\partial(\partial^\sigma \varphi_n)}{\partial x^\mu}$$

$$= \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_n} \partial_\mu \varphi_n + \sum_{n,\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\sigma \varphi_n)} \partial_\mu \partial^\sigma \varphi_n$$

mit den Feldgleichungen

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_n} - \sum_\sigma \partial^\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\sigma \varphi_n)}$$

folgt:

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \sum_{n,\sigma} \left[\left(\partial^\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\sigma \varphi_n)} \right) \partial_\mu \varphi_n + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\sigma \varphi_n)} \partial^\sigma \partial_\mu \varphi_n \right]$$

$$= \sum_{n,\sigma} \partial^\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\sigma \varphi_n)} \partial_\mu \varphi_n \right]$$

mit $\partial_\mu \mathcal{L} = \sum_\sigma g_{\mu\sigma} \partial^\sigma \mathcal{L}$ folgt:

$$\sum_\sigma \partial^\sigma \left(\sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\sigma \varphi_n)} \partial_\mu \varphi_n - g_{\mu\sigma} \mathcal{L} \right) = 0$$

definiere das Tensorfeld $T_{\mu\sigma} = T_{\mu\sigma}(x)$ als:

$$T_{\mu\sigma} = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \varphi_n)} \partial_\sigma \varphi_n - g_{\mu\sigma} \mathcal{L}$$

dann gilt

$$\sum_\mu \partial^\mu T_{\mu\sigma} = 0$$

oder mit

$$\boxed{T^{\mu\sigma} = \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_n)} \partial^\sigma \varphi_n - g^{\mu\sigma} \mathcal{L}}$$

folgen die 4 Erhaltungssätze

$$\boxed{\sum_\mu \partial_\mu T^{\mu\sigma} = 0}$$

beachte: $T^{\mu\sigma}$ ist nicht eindeutig!

sei $G^{\mu\sigma\rho}$ ein Tensor 3. Stufe mit

$$G^{\mu\sigma\rho} = - G^{\rho\sigma\mu}$$

dann folgt für

$$\bar{T}^{\mu\sigma} = T^{\mu\sigma} + \sum_\rho \partial_\rho G^{\mu\sigma\rho}$$

dass

$$\sum_\mu \partial_\mu \bar{T}^{\mu\nu} = \underbrace{\sum_\mu \partial_\mu T^{\mu\nu}}_{=0} + \overbrace{\sum_{\mu\rho} \underbrace{\partial_\mu \partial_\rho}_{\text{sym.}} \underbrace{G^{\mu\nu\rho}}_{\text{antisym.}}}^{=0}$$

sym. antisym.
bei Vertauschen
von $\mu \leftrightarrow \rho$

zur eindeutigen Festlegung des Tensors fordern wir daher dessen Symmetrie

$$T^{\mu\nu} \overset{!}{=} T^{\nu\mu}$$

---

für das elektromagnetische Feld (ohne Quellen!) folgt mit

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} \sum_{\mu\nu} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

dass

$$T^{\mu\nu} = \sum_\rho \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)}}_{-\frac{1}{4\mu_0}\cdot 4 \cdot (\partial^\mu A^\rho - \partial^\rho A^\mu) = -\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\rho}} \cdot \partial^\nu A_\rho - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} \sum_\rho F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4\mu_0} g^{\mu\nu} \sum_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

es ist $T^{\mu\nu} \neq T^{\nu\mu}$!

wir addieren daher den Term

$$\frac{1}{\mu_0}\sum_\rho F^{\mu\rho}\partial_\rho A^\nu = \sum_\rho \partial_\rho \left[\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\rho} A^\nu\right]$$

$$\sum_\rho \partial_\rho F^{\mu\rho} = -\sum_\rho \partial_\rho F^{\rho\mu} = 0$$

(in Abwesenheit von Quellen)

$[\ldots] = \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\rho} A^\nu$ ist ein in μ, ρ antisymmetrischer Tensor 3. Stufe (✓)

definiere also

$$T_{em}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{1}{\mu_0}\sum_\rho F^{\mu\rho}\partial_\rho A^\nu$$

es gilt:

$$T_{em}^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\sum_\rho F^{\mu\rho}\overbrace{(\partial_\rho A^\nu - \partial_\nu A^\rho)}^{F_\rho{}^\nu = \sum_\mu g_{\rho\mu} F^{\mu\nu}}$$

$$+ \frac{1}{4\mu_0}\sum_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \cdot g^{\mu\nu}$$

$$\boxed{T_{\text{M}}^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\sum_{\rho} F^{\mu\rho} F_{\rho}{}^{\nu} + \frac{1}{4\mu_0}\sum_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}\, g^{\mu\nu}}$$

Maxwellsches Tensorfeld

es gilt $\boxed{T_{\text{M}}^{\mu\nu} = T_{\text{M}}^{\nu\mu}}$ denn:

$$\sum_{\rho} F^{\nu\rho} F_{\rho}{}^{\mu} = \sum_{\rho} F_{\rho}{}^{\mu} F^{\nu\rho} = -\sum_{\rho} F_{\rho}{}^{\mu} F^{\rho\nu}$$

$$= -\sum_{\rho} F^{\rho\mu} F_{\rho}{}^{\nu} = \sum_{\rho} F^{\mu\rho} F_{\rho}{}^{\nu}$$

weiter ist T_{M} spurlos

$$\boxed{\sum_{\mu} T_{\text{M}}{}^{\mu}{}_{\mu} = 0}$$ denn:

$$\sum_{\mu} T_{\text{M}}{}^{\mu}{}_{\mu} = \underbrace{\frac{1}{\mu_0}\sum_{\mu\rho} F^{\mu\rho} F_{\rho\mu} + \frac{1}{4\mu_0}\sum_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \underbrace{\sum_{\mu} \delta^{\mu}_{\mu}}_{=4}}_{=0}$$

es gilt (nach wie vor):

$$\boxed{\sum_{\mu} \partial_{\mu} T_{\text{M}}^{\mu\nu} = 0}$$

Energie- und Impulserhaltung des elektromagnetischen Felds in Abwesenheit von Quellen sei jetzt $j^\nu \neq 0$; dann gilt

$$\sum_\mu \partial_\mu T_{em}^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\sum_{\mu\rho} \partial_\mu F^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu$$

$$+ \frac{1}{\mu_0}\sum_{\mu\rho} F^{\mu\rho}\partial_\mu F_\rho{}^\nu$$

$$+ 2\,\frac{1}{4\mu_0}\sum_{\mu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}\partial_\mu F^{\rho\sigma} g^{\mu\nu}$$

$\sum_\mu \partial_\mu F^{\mu\rho} = \mu_0 j^\rho$

$$= \sum_\rho j^\rho F_\rho{}^\nu + \frac{1}{\mu_0}\sum_{\mu\rho} F_{\mu\rho}\partial^\mu F^{\rho\nu}$$

$$+ \frac{1}{2\mu_0}\sum_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma}$$

$$= \sum_\rho j_\rho F^{\rho\nu} + \frac{1}{2\mu_0}\sum_{\mu\rho} F_{\mu\rho}\left(\partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\nu F^{\mu\rho}\right)$$

$$+ \frac{1}{2\mu_0}\sum_{\mu\rho} F_{\mu\rho}\,\partial^\mu F^{\rho\nu}$$

$\partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\nu F^{\mu\rho} + \partial^\rho F^{\nu\mu} = 0$

$$= \sum_\rho j_\rho F^{\rho\nu} + \underbrace{\frac{1}{2\mu_0}\sum_{\mu\rho} F_{\mu\rho}\,\partial^\rho F^{\mu\nu} + \frac{1}{2\mu_0}\sum_{\mu\rho} F_{\mu\rho}\,\partial^\mu F^{\rho\nu}}$$

$$\frac{1}{2\mu_0}\sum_{\mu\rho} \underbrace{F_{\mu\rho}}_{\text{antisym}}\underbrace{\left(\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\rho\nu}\right)}_{\text{sym.}} = 0$$

bei $\mu \leftrightarrow \rho$

also:

$$\boxed{\sum_\mu \partial_\mu T_{\text{M}}^{\mu\nu} + \sum_\mu F^{\nu\mu} j_\mu = 0}$$

Erhaltungssatz für $j=0$

Austausch von Energie und Impuls zwischen Feld und Materie

10.5 Energie- und Impulsaustausch

Berechnung der Komponenten des Maxwellschen Tensors:

$$\sum_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 2\left(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{E}^2\right) \qquad \text{(s.o.)}$$

$$\sum_\rho F^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & -\vec{E}/c & \\ \hline & 0 & -B_z & B_y \\ \vec{E}/c & B_z & 0 & -B_x \\ & -B_y & B_x & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & -\vec{E}/c & \\ \hline & 0 & B_z & -B_y \\ -\vec{E}/c & -B_z & 0 & B_x \\ & B_y & -B_x & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} \vec{E}^2/c^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \frac{1}{c}(E_yB_z - E_zB_y) & -\frac{E_x^2}{c^2} + B_y^2 + B_z^2 & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{c}(E_zB_x - E_xB_z) & -\frac{1}{c^2}E_xE_y - B_xB_y & -\frac{E_y^2}{c^2} + B_x^2 + B_z^2 & \cdot \\ \frac{1}{c}(E_xB_y - E_yB_x) & -\frac{1}{c^2}E_xE_z - B_xB_z & -\frac{1}{c^2}E_yE_z - B_yB_z & -\frac{E_z^2}{c^2} + B_x^2 + B_y^2 \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{4\mu_0}\sum_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} = \frac{1}{2\mu_0}\begin{cases} \vec{B}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{E}^2 & \mu=\nu=0 \\ \frac{1}{c^2}\vec{E}^2 - \vec{B}^2 & \mu=\nu=1,2,3 \end{cases}$$

damit ist

$$\mu_0 T_M^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2}+\vec{B}^2\right) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \frac{1}{c}(\vec{E}\times\vec{B})_x & \frac{1}{c^2}\left(-\frac{1}{2}E_x^2+\frac{1}{2}E_y^2+\frac{1}{2}E_z^2\right) - \frac{1}{2}B_x^2+\frac{1}{2}B_y^2+\frac{1}{2}B_z^2 & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{c}(\vec{E}\times\vec{B})_y & -\frac{1}{c^2}E_xE_y - B_xB_y & \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}E_x^2-\frac{1}{2}E_y^2+\frac{1}{2}E_z^2\right) + \frac{1}{2}B_x^2-\frac{1}{2}B_y^2+\frac{1}{2}B_z^2 & \\ \frac{1}{c}(\vec{E}\times\vec{B})_z & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$$

also

$$T_M^{00} = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2}+\vec{B}^2\right) = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 = \rho_E$$

(ρ_E: Energiedichte des elektromagnetischen Felds)

$$T^{i0} = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{c}(\vec{E}\times\vec{B})_i = T^{0i} = \frac{1}{c}S_i$$

($\vec{S}$: Energiestromdichte, Poynting-Vektor)

aus $\sum_\mu \partial_\mu T_M^{\mu\nu} = 0$ folgt mit $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$

$$\boxed{\frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{S} = 0}$$

Quellen:

$$\sum_\mu F^{\partial\mu} j^\mu = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & -\vec{E}/c & \\ \hline \vec{E}/c & 0 & -B_z & B_y \\ & B_z & 0 & -B_x \\ & -B_y & B_x & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} c\rho \\ \hline -\vec{j} \end{array}\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{c}\vec{j}\vec{E},\ \rho E_x + j_y B_z - j_z B_y,\right.$$

$$\left.\rho E_y - j_x B_z + j_z B_x,\ \rho E_z + j_x B_y - j_y B_x\right)^T$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\vec{j}\vec{E} \\ \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} \end{pmatrix}$$

Energieaustausch: (Bilanzgleichung)

$$\boxed{\frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \nabla\vec{S} = -\vec{j}\vec{E}}$$

integral

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3r\,\rho_E + \int_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{S} = -\underbrace{\int_V d^3r\,\vec{j}\vec{E}}$$

zeitl. Änderung der Feldenergie in V

Energiestrom durch die Oberfläche ∂V

vom Feld an den Teilchen verrichtete Arbeit / Zeit, d.h. Leistungsabgabe räumliche Komponenten des Maxwellschen Tensors:

$$\mu_0 T_M^{ij} = -\frac{1}{c^2} E_i E_j - B_i B_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2\right)$$

$$= -\mu_0 \sigma_{ij}$$

Maxwellscher <u>Spannungstensor</u> (3-Tensor!)

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right)$$

$$\boxed{\sigma_{ij} = \varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \delta_{ij}\, \rho_E}$$

insgesamt:

$$T_M^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} \rho_E & \frac{1}{c}\vec{S} \\ \hline \frac{1}{c}\vec{S} & -\underline{\sigma} \end{array}\right)$$

es gelten also die Erhaltungssätze (keine Qu.)

$$\sum_\mu \partial_\mu T_M^{\mu i} = 0$$

bzw. die Bilanzgleichungen

$$\sum_\mu \partial_\mu T_M^{\mu i} + \sum_\mu F^{i\mu} j_\mu = 0$$

$$\sum_\mu \partial_\mu T_M^{\mu i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{c} S_i\right) - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji}$$

definiere

$$\boxed{\vec{P} = \frac{1}{c^2}\vec{S}}$$

<u>Feldimpulsdichte</u>

$$[P] = \frac{\text{Zeit}^2}{\text{Länge}^2} \cdot \frac{\overbrace{\text{Energie}}^{\text{Masse}\,\frac{\text{Länge}^2}{\text{Zeit}^2}}}{\text{Zeit}\cdot\text{Länge}^2} = \text{Masse} \cdot \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} \cdot \frac{1}{\text{Länge}^3}$$

<u>Erhaltungssätze:</u>

$-\sigma$: Impulsstromdichte!
d.h. $-\sigma_{ji}$ ist die j-te Komp. des Flusses der i-ten Komp. der Feldimpulsdichte

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji} = 0$$

integral:

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3r\, P_i = \overbrace{\int_{\partial V} d\vec{A} \underbrace{\sum_j \sigma_{ji}\vec{e}_j}_{\text{Kraft pro Fläche: Strahlungsdruck}}}^{-\text{ Impulsfluss durch } \partial V}$$

zeitliche Änderung der i-ten Feldimpulskomponente ("Kraft auf das Feld in V")

Kraft pro Fläche:
<u>Strahlungsdruck</u>

Bilanzgleichungen

$$0 = \frac{\partial P_i}{\partial t} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji} + \underbrace{\rho E_i + (\vec{J} \times \vec{B})_i}_{\frac{1}{d^3r} dq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_i}$$

Lorentz - Kraftdichte
(auf die Teilchen!)

Integral für $V \to \infty$ (Felder verschwinden auf ∂V)

$$0 = \frac{d}{dt} \int d^3r\, P_i + \int dq\, (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_i$$

zeitliche Änderung des Feldimpulses

gesamte Lorentzkraft

10.6 Freie skalare Feldtheorie

neutrale Teilchen ohne innere Freiheitsgrade

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_\mu \partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi^2}$$

- φ reell ($\to$ keine erhaltene Ladung)
- $\mathcal{L}$ Lorentz-Skalar
- $\mathcal{L}$ quadratisch in den Feldern
  ($\to$ lineare Feldgleichung, lösbar, keine WW)
- $\mathcal{L}$ mit ersten Ableitungen des Felds
  ($\to$ Feldgleichung DGL 2. Ordnung)
- keine inneren Freiheitsgrade:
  einkomponentiges Feld
- "Teilchen": Welle-Teilchen-Dualismus
  in der QM (bzw. Q-Feldtheorie)

Feldgleichung:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \sum_\mu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}$$

$$= - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi - \sum_\mu \partial_\mu \partial^\mu \varphi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) \psi(\vec{r},t) = 0}$$

Klein-Gordon-Gleichung

allg. Lösung: Superposition ebener Wellen

Ansatz:

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_0 \, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hbar^2\omega^2 = \pm\sqrt{c^2(\hbar k)^2 + m^2c^4}}$$

(relativistische Energie-Impuls-Relation)

- ψ^* ist ebenfalls Lösung, $\frac{1}{2}(\psi + \psi^*)$ ebenfalls
  $\psi(\vec{r},t) = \psi_0 \, \mathrm{Re}\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$ ist <u>reelle</u> Lösung

- $\psi(x) = \psi_0 \exp\left(-i \sum_\mu k_\mu x^\mu \right)$ mit

  $x^\mu = (ct, \vec{r})^T \quad k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)^T \quad k_\mu = \left(\frac{\omega}{c}, -\vec{k}\right)$

Verallgemeinerung auf geladene Teilchen:

$$\boxed{\mathcal{L} = \sum_\mu \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \varphi^* \varphi}$$

komplexes Feld φ, φ und φ^* unabhängig

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \sum_\mu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = -\frac{m^2c^2}{\hbar^2} \varphi^* - \sum_\mu \partial_\mu \partial^\mu \varphi^*$$

äquivalent zur Feldgleichung für φ

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) \varphi &= 0 \\ \left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) \varphi^* &= 0 \end{aligned}}$$

Lösung:

$$\varphi(x) = \varphi_0 \, e^{-i \sum_\mu k_\mu x^\mu}$$

$$\hbar\omega = \pm \sqrt{c^2 (\hbar k)^2 + m^2c^4}$$

alles analog zum reellen Fall, <u>aber</u>:

$\mathcal{L}$ ist invariant unter der $U(1)$ - Eichtransformation

$$\boxed{\varphi \mapsto \varphi' = e^{+iq\Lambda} \varphi}$$

$$\boxed{\psi^* \mapsto \psi'^* = e^{+iq\Lambda}\,\psi^*}$$

mit $\Lambda = \text{const}$ (kontinuierlicher Parameter)

q: feste, reelle "Kopplungskonstante"

schreibe $\psi = e^{-iq\Lambda}\psi'$ $\psi^* = e^{+iq\Lambda}\psi'^*$

nach dem Noether-Theorem gilt dann

$$\boxed{\sum_\mu \partial_\mu j^\mu = 0}$$

mit

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\frac{\partial\psi}{\partial\Lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*)}\frac{\partial\psi^*}{\partial\Lambda}\Bigg|_{\Lambda=0}$$

$$= \partial^\mu\psi^*(-iq)\psi + \partial^\mu\psi\,(iq)\,\psi^*$$

$$\boxed{j^\mu = iq\,(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\,\partial^\mu\psi^*)} \qquad \text{(reell!)}$$

mit $\psi = \psi_0\, e^{-i\sum_\mu k_\mu x^\mu}$ und

$\partial^\mu\psi = -ik^\mu\psi$, $\partial^\mu\psi^* = ik^\mu\psi$ ist:

$$j^\mu = iq\,(\psi^*(-ik^\mu)\psi - \psi\, ik^\mu\psi^*)$$

$$j^\mu = 2q\,k^\mu\,\psi^*\psi$$

für eine Lösung mit $k^\mu \mapsto -k^\mu$

(d.h. negativer Viererimpuls mit negativer Energie)

ist

$$j^\mu = 2q\,(-k^\mu)\,\varphi^*\varphi$$

bzw.

$$j^\mu = 2(-q)\,k^\mu\,\varphi^*\varphi$$

Der von einem Teilchen (π^+, Ladung $q = +e$) mit 4er-Impuls $-p^\mu = -\hbar k^\mu$ hervorgerufene Strom ist identisch mit dem Strom verursacht durch ein <u>Antiteilchen</u> (π^-, Ladung $q = -e$) mit Impuls p^μ

$\mathcal{L}$ beschreibt Teilchen und zugehörige Antiteilchen (Feynman-Stückelberg-Interpretation)

allg. Lsg. der Klein-Gordon-Gleichung:

$$\varphi(x) = \int d^3k\left(\varphi_+(\vec{k})\,e^{-i\sum k_\mu x^\mu} + \varphi_-(\vec{k})\,e^{+i\sum k_\mu x^\mu}\right)$$

$$= \varphi_+(x) + \varphi_-(x) \qquad +/-:\ \text{pos./neg. Energie}$$

neutrale Teilchen: $\varphi(x)$ reell, $\varphi_-(x) = \varphi_+(x)^*$

$\Rightarrow$ Teilchen und Antiteilchen identisch

10.7 Abelsche Eichtheorie

geladene Teilchen : Komplexes Feld $\psi(x)$

$$\mathcal{L}_0 = \sum_\mu \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi^* \psi$$

beschreibt freie Teilchen !

Wechselwirkung ? (elektromagnetisch , Teilchen sind geladen)

beachte:

$\mathcal{L}_0$ ist invariant unter <u>globalen Eichtransformationen</u>

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = U \psi(x)$$
$$\psi^*(x) \mapsto \psi'^*(x) = U^* \psi^*(x)$$

mit $U = e^{iq\Lambda}$ und $\Lambda = \text{const}$

denn

$$\psi^* \psi = \psi'^* \psi' \ , \quad \partial_\mu \psi^* \cdot \partial^\mu \psi = \partial_\mu \psi'^* \partial^\mu \psi'$$

aber $\mathcal{L}_0$ ist nicht invariant unter <u>lokalen Eichtransformationen</u>

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = U(x) \psi(x)$$
$$\psi^*(x) \mapsto \psi'^*(x) = U(x)^* \psi^*(x)$$

mit $U(x) = e^{iq\Lambda(x)}$

denn:

$$\partial^\mu \psi(x) \mapsto \partial^\mu \psi'(x) = \partial^\mu \big(U(x)\psi(x) \big)$$

$$= \partial^\mu U(x) \cdot \psi(x) + U(x) \cdot \partial^\mu \psi(x) \neq U(x)\,\partial^\mu \psi(x)$$

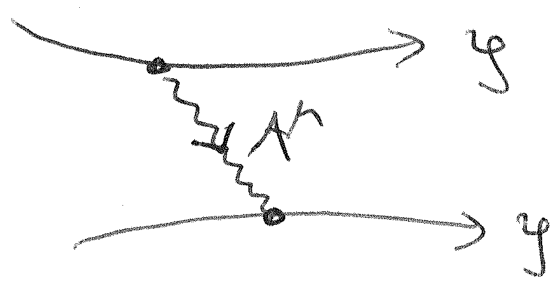
eine <u>lokale</u> Transformation ist allerdings dem Feldkonzept sehr viel verwandter $\longrightarrow$

grundlegende <u>Forderung</u> an eine (Eich-) Feldtheorie:

$$\boxed{\text{Die Lagrange-Dichte ist invariant unter lokalen Eichtransformationen}}$$

- impliziert, dass $\mathcal{L}_0$ modifiziert werden muss
- die Modifikation gelingt nur durch Ankopplung des <u>Materiefelds</u> ψ, ψ^* an ein <u>Eichfeld</u> A^μ
- dadurch wird der fehlende Wechselwirkungsterm generiert, daher:

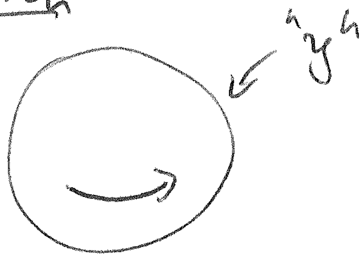
  <u>„dynamisches Prinzip der Eichinvarianz"</u>



- das Eichprinzip liegt allen Eichtheorien (und insbesondere dem Standardmodell) zugrunde
- $\mathcal{L}$ kann sehr kompliziert sein, wird aber fast vollständig durch das Eichprinzip vorgeschrieben

Veranschaulichung:

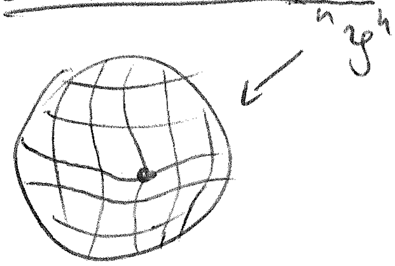
<u>Rotation</u>



Invarianz unter globalen Eichtrsf.

$$e^{iq\Lambda}$$

<u>lokale Rotation</u>



Invarianz unter lokalen Eichtrsf.

$$e^{iq\Lambda(x)}$$

Invarianz nur bei gleichzeitiger Eichtransformation der Eichfelder

$$\boxed{A^\mu \mapsto A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Lambda}$$

(schon bekannte Eichtransformation der Potenziale in der Elektrodynamik)

im anschaulichen Bild: lokale Rotation bewirkt Rückstellkräfte

Durch welche Modifikation von $\mathcal{L}_0$ kann lokale Eichinvarianz hergestellt werden?

Prinzip der minimalen Substitution

$$\boxed{\partial^\mu \mapsto D^\mu := \partial^\mu + iq A^\mu}$$

D^μ: "kovariante Ableitung"

Beweis:

(nur für den Ableitungsterm $\sum_\mu \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi$; der Masseterm $\sim \psi^* \psi$ ist schon eichinvariant)

z.z.: $\sum_\mu (D_\mu \psi)^* (D^\mu \psi)$ ist invariant

unter $\psi \mapsto \psi' = U\psi = e^{iq\Lambda}\psi$

und $A^\mu \mapsto A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Lambda$

es gilt für beliebiges $\Lambda = \Lambda(x)$:

$$D^\mu \psi \longmapsto D'^\mu \psi' = (\partial^\mu + iq A'^\mu)\, U \psi$$

$$= (\partial^\mu + iq A^\mu - iq\, \partial^\mu \Lambda)\, e^{iq\Lambda} \psi$$

$$= \underbrace{(\partial^\mu e^{iq\Lambda})\psi}_{iq\partial^\mu\Lambda \cdot e^{iq\Lambda}\psi} + e^{iq\Lambda}(\partial^\mu\psi) + iq A^\mu \cdot e^{iq\Lambda}\psi$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - iq\partial^\mu\Lambda\, e^{iq\Lambda}\psi$$

$$= e^{iq\Lambda}(\partial^\mu\psi + iq A^\mu\psi)$$

$$= \mathcal{U}(\partial^\mu + iqA^\mu)\psi$$

$$= \mathcal{U} D^\mu \psi$$

damit folgt

$$\sum_\mu (D_\mu\psi)^*(D^\mu\psi) \mapsto \sum_\mu (\mathcal{U}D_\mu\psi)^*(\mathcal{U}D^\mu\psi)$$

$$= \sum_\mu (D_\mu\psi)^* \underbrace{\mathcal{U}^*\mathcal{U}}_{=1} D^\mu\psi = \sum_\mu (D_\mu\psi)^* D^\mu\psi$$

✓

Anwendung des Eichprinzips: $\mathcal{L}_0 \to \tilde{\mathcal{L}}$

$$\boxed{\tilde{\mathcal{L}} = \sum_\mu (D_\mu\psi)^*(D^\mu\psi) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi^*\psi}$$

- lokal eichinvariant ($\mathcal{L}_0$ nicht)
- beinhaltet Kopplung an Eichfeld A^μ

Herleitung (!) des Wechselwirkungsterms:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sum_\mu (\partial_\mu + iqA_\mu)^* \psi^* \cdot (\partial^\mu + iqA^\mu)\psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi^*\psi$$

$$\boxed{\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{WW}}$$ mit

$$\mathcal{L}_0 = \sum_\mu \partial_\mu\psi^* \partial^\mu\psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi^*\psi$$

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}_{WW} = &\sum_\mu (-iq) A_\mu \psi^* \cdot \partial^\mu\psi \\ &+ \sum_\mu \partial_\mu \psi^* \cdot iq A^\mu \psi\end{aligned}\right\} -\sum_\mu iq(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*) \times A_\mu = \sum_\mu j_0^\mu A_\mu$$

$$+ \sum_\mu q^2 A_\mu A^\mu \psi^*\psi$$

Strom der freien Feldtheorie!

$$\boxed{\mathcal{L}_{WW} = -\sum_\mu j_0^\mu A_\mu + q^2 \sum_\mu A^\mu A_\mu \psi^*\psi}$$

Das Eichprinzip generiert die Wechselwirkung!

Für eine vollständige Theorie (wechselwirkende skalare Mesonen $\pi^\pm$) fehlt noch der "kinetische" Anteil des Eichfelds

$$\boxed{\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4\mu_0}\sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}$$

$U(1)$ - Eichtheorie $\qquad \psi' = U\psi \qquad U = e^{iq\Lambda}$

$SU(2)$ - Eichtheorie $\qquad \begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \end{pmatrix} = \underline{U} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$

$\underline{U}$: 2×2 - Matrix mit

$\underline{U}\,\underline{U}^\dagger = \underline{U}^\dagger \underline{U} = \mathbb{1}$ und

$\det \underline{U} = +1$

$SU(N)$ - Eichtheorie $\qquad \underline{U} \in SU(N)$

<u>allgemeine</u> Konstruktion des Feldstärketensors:

$$\boxed{F^{\mu\nu} = -\frac{i}{q}\left(D^\mu D^\nu - D^\nu D^\mu\right)}$$

für $U(1)$ gilt:

$$D^\mu D^\nu \psi = (\partial^\mu + iqA^\mu)(\partial^\nu + iqA^\nu)\psi$$

$$= \partial^\mu \partial^\nu \psi + iq\,\partial^\mu (A^\nu \psi) + iq\,A^\mu(\partial^\nu \psi) - q^2 A^\mu A^\nu \psi$$

$$= \partial^\mu \partial^\nu \psi + iq(\partial^\mu A^\nu)\psi + iq A^\nu(\partial^\mu \psi) + iq A^\mu(\partial^\nu \psi) - q^2 A^\mu A^\nu \psi$$

also:

$$D^\mu D^\nu \psi - D^\nu D^\mu \psi = iq(\partial^\mu A^\nu)\psi - iq(\partial^\nu A^\mu)\psi$$

$$D^\mu D^\nu - D^\nu D^\mu = iq(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad \checkmark$$

vollständige $U(1)$ - Eichtheorie:

$$\mathcal{L} = \sum_\mu (D_\mu \psi)^* (D^\mu \psi) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \psi^* \psi$$

$$- \frac{1}{4\mu_0} \sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^*, A_\mu, \partial_\mu A_\nu)$$

$$\mathcal{L} = \sum_\mu \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \psi^* \psi$$

$$- iq \sum_\mu (\psi^* \partial_\mu \psi - \psi \partial_\mu \psi^*) A^\mu$$

$$+ q^2 \sum_\mu A_\mu A^\mu \psi^* \psi$$

$$- \frac{1}{4\mu_0} \sum_{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$\mathcal{L}$ ist invariant unter globaler $U(1)$ - Eichtraf.

$$\psi \mapsto \psi' = U\psi = e^{iq\Lambda} \psi \qquad (A^\mu \text{ fest})$$

also (Noether): $\sum_\mu \partial_\mu j^\mu = 0$ mit

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \frac{\partial \psi}{\partial \Lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \frac{\partial \psi^*}{\partial \Lambda} \Big|_{\Lambda=0}$$

$$= \partial^\mu \psi^* (-iq) \psi - iq \psi^* A^\mu (-iq) \psi$$

$$+ \partial^\mu \psi \, iq \psi^* + iq \psi A^\mu iq \psi^*$$

$$= iq\left(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*\right) - 2q^2 \psi^* \psi A^\mu$$

also

$$\boxed{\begin{aligned} j^\mu &= j_0^\mu - 2q^2 \psi^*\psi A^\mu \\ j^\mu &= j_0^\mu \Big|_{\partial^\mu \mapsto \partial^\mu + iqA^\mu} \end{aligned}}$$

<u>Feldgleichungen</u>:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \sum_\mu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)}$$

wegen $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ gilt:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \sum_\mu D_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(D_\mu \psi^*)}$$

also:

$$0 = -\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi - \sum_\mu D_\mu D^\mu \psi$$

$$\boxed{\left(\sum_\mu D_\mu D^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0}$$

weiter gilt:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \sum_\nu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}$$

$$= -j_0^\mu + 2q^2 A^\mu \psi^* \psi - \sum_\nu \partial_\nu \left(-\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\mu}\right)$$

also:

$$\boxed{\sum_\nu \partial_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0 j^\mu}$$

---

beachte:

$$\mathcal{L} \mapsto \hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \underbrace{\frac{1}{2} m^2 \sum_\mu A_\mu A^\mu}_{\text{Masseterm, } m\text{: Photonenmasse}} = \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}$$

$\Delta\mathcal{L}$ ist nicht eichinvariant!

$$\Delta\mathcal{L} \mapsto \frac{1}{2} m^2 \sum_\mu (A_\mu - \partial_\mu \Lambda)(A^\mu - \partial^\mu \Lambda) \neq \Delta\mathcal{L}$$

also:

Eichtheorien nur formulierbar für masselose Austauschteilchen (masselose Eichfelder)

$U(1)$: $m_{\text{Photon}} = 0$ ✓

schwache WW: $m_{W^\pm}, m_{Z^0} \neq 0$?