7 Hamilton-Formalismus

7.1 Kanonische Gleichungen

konservatives N-Teilchen-System, holonome ZB

$$L(q, \dot q, t) = T - U$$

generalisierter Impuls

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot q_n} = p_n(q, \dot q, t) \qquad \text{für } n = 1, \dots, f$$

auflösen nach $\dot q_n$ liefert

$$\dot q_n = \dot q_n(q, p, t) \qquad (\text{mit } p = (p_1, \dots, p_f))$$

Def: Hamilton-Funktion

$$\boxed{H(q,p,t) = \sum_{n=1}^{f} p_n \cdot \dot q_n(q,p,t) - L(q, \dot q(q,p,t), t)}$$

Bsp: freies Teilchen, ebene Bewegung, Polarkoordinaten

$$L(\rho, \varphi, \dot\rho, \dot\varphi) = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2 \dot\varphi^2\right)$$

also: $p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot\rho} = m\dot\rho \quad \Rightarrow \quad \dot\rho = \frac{1}{m} p_\rho$

$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m\rho^2 \dot\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot\varphi = \frac{1}{m\rho^2} p_\varphi$

$$H(\rho, \varphi, p_\rho, p_\varphi) = p_\rho \cdot \frac{1}{m} p_\rho + p_\varphi \cdot \frac{1}{m\rho^2} p_\varphi$$

$$- \frac{m}{2}\left(\frac{p_\rho^2}{m^2} + \rho^2 \frac{p_\varphi^2}{m^2 \rho^4}\right) = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2}$$

partielle Ableitungen von $H(q,p,t)$:

$$\frac{\partial H}{\partial q_n} = \frac{\partial}{\partial q_n}\left[\sum_m p_m \dot{q}_m(q,p,t) - L(q,\dot{q}(q,p,t),t)\right]$$

$$= \sum_m p_m \frac{\partial \dot{q}_m}{\partial q_n} - \sum_m \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}}_{p_m} \frac{\partial \dot{q}_m}{\partial q_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n}$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial q_n}$$

$$\overset{\text{LII}}{=} -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = -\frac{d}{dt} p_n = -\dot{p}_n$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_n} = \frac{\partial}{\partial p_n}\left[\sum_m p_m \dot{q}_m(q,p,t) - L(q,\dot{q}(q,p,t),t)\right]$$

$$= \dot{q}_n + \sum_m p_m \frac{\partial \dot{q}_m}{\partial p_n} - \sum_m \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}}_{p_m} \frac{\partial \dot{q}_m}{\partial p_n}$$

$$= \dot{q}_n$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_m p_m \frac{\partial \dot{q}_m}{\partial t} - \sum_m \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}}_{p_m} \frac{\partial \dot{q}_m}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial t}$$

<u>Hamiltonsche Bewegungsgleichungen</u>
(kanonische Gleichungen)

$$\boxed{\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \qquad \dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}} \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}\right)$$

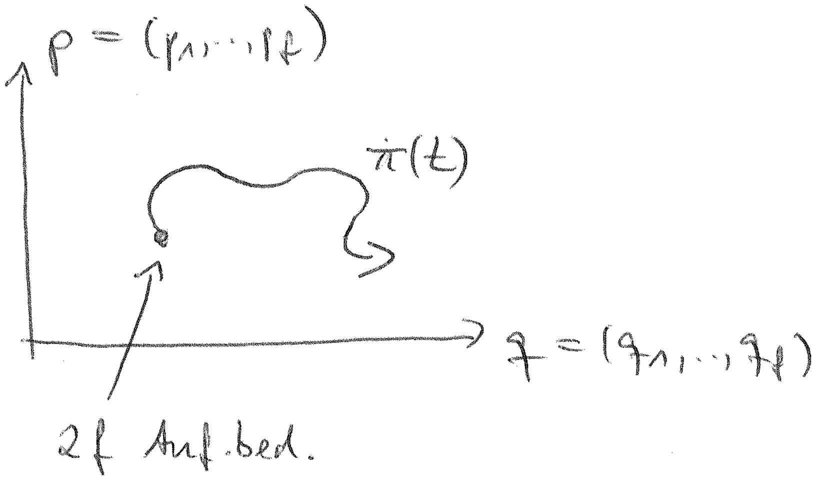
2f DGL's 1. Ordnung bestimmen mit
2f Anfangsbedingungen

$$q_n(t_0) = q_{n0} \qquad p_n(t_0) = p_{n0}$$

die Dynamik des Systems, d.h.

$$q(t) \text{ und } p(t)$$

(q,p) ist ein Punkt des 2f-dimensionalen
<u>Phasenraums</u> $\quad \pi = (q,p)$ heißt Phase



Vorteile gegenüber Lagrange-Formalismus:

1) Symmetrie der Gleichungen
   q, p gleichberechtigt
   große Klasse an Symmetrietransformationen

2) H hat direkte phys. Bedeutung (L nicht)
   falls a) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

   b) $x_j = x_j(q, \cancel{t})$ sklerononome ZB mit t-unabh. Trsf.formeln

a) $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

es folgt

$$\frac{d}{dt} H = \frac{d}{dt} H(q,p) = \sum_n \frac{\partial H}{\partial q_n} \dot{q}_n - \sum_n \frac{\partial H}{\partial p_n} \dot{p}_n$$

$$= \sum_n \left(-\dot{p}_n \dot{q}_n + \dot{q}_n \dot{p}_n\right) = 0$$

also $H = \text{const}$

(oder: $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow \sum_n p_n \dot{q}_n - L = H = \text{const}$)

b) $x_j = x_j(q)$ t- unabhängig

es folgt

$$T = \sum_j \frac{m_j}{2} \dot{x}_j^2 = \sum_{mn} \frac{1}{2} a_{mn}(q) \dot{q}_m \dot{q}_n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sum_n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n = T$$

$$\Rightarrow \sum_n p_n \dot{q}_n = 2T \qquad \text{(siehe auch oben)}$$

also

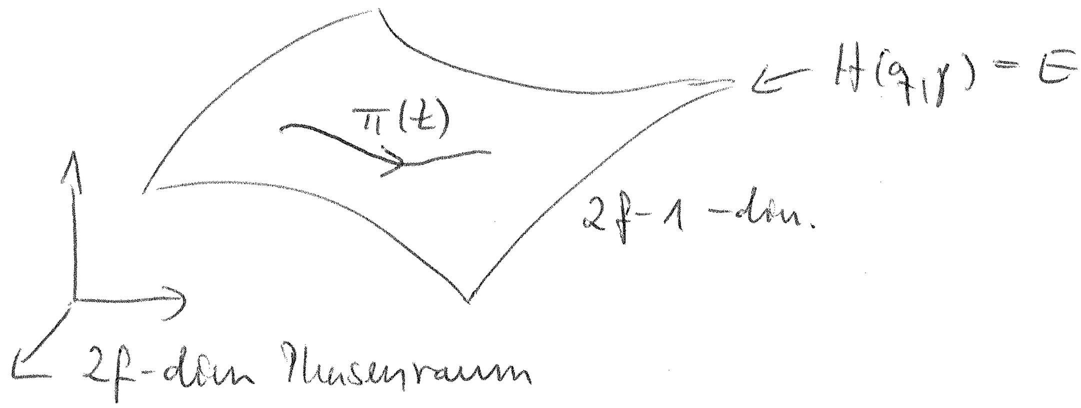
$$H = \sum_n p_n \dot{q}_n - L = 2T - (T - U) = T + U$$

$H(q,p) = E = \text{const}$ Gesamtenergie

Energieerhaltung

$$H(q(t), p(t)) = E = \text{const} \quad \forall t$$

<u>Phasentrajektorie</u> $(q(t), p(t))$ verläuft innerhalb der $(2f-1)$-dimensionalen Hyperfläche $H(q,p) = E$



$\Rightarrow$ statistische Physik

Ergodenhypothese: $\pi(t)$ kommt für $t \to \infty$ (für makroskopische Zeiten) jedem Punkt von $H = E$ beliebig nahe

---

<u>Zyklische Koordinaten:</u>

q_n zyklisch $\Rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow p_n = \text{const}$

$\Rightarrow \dot{p}_n = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \Rightarrow$ q_n kommt in $H(q,p,t)$ nicht vor

beachte $\dfrac{\partial H}{\partial p_n} = 0 \Rightarrow q_n = \text{const}$ sinnlos (denn dann ist q_n keine general. Koordinate)

7.2 Hamiltonsche Systeme

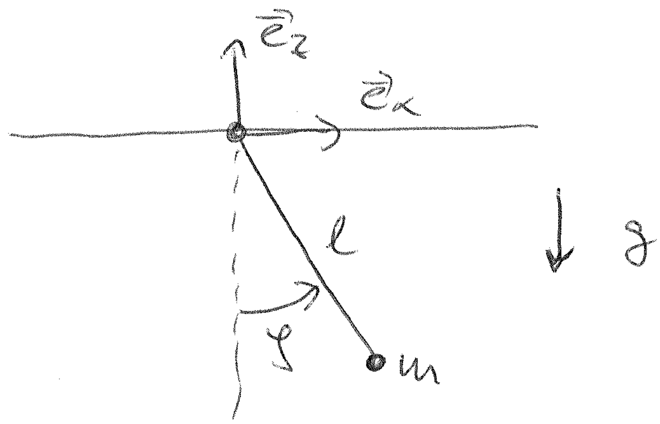
Hamilton - Schema zur Behandlung mechanischer Probleme:

- q wählen
- $x = x(q,t)$ bestimmen
- $L = L(q,\dot{q},t)$ aufstellen
- $p_n = \partial L / \partial \dot{q}_n = p_n(q,\dot{q},t)$
- auflösen: $\dot{q}_n = \dot{q}_n(q,p,t)$
- $H(q,p,t) = \sum_n p_n \dot{q}_n - L$ aufstellen
- kanonische Gleichungen ableiten

  $\dot{p}_n = -\partial H / \partial q_n \quad \dot{q}_n = \partial H / \partial p_n$
- integrieren

beachte: Abkürzung nicht möglich, da $\dot{q} = \dot{q}(q,p,t)$ gebraucht wird!

A) Pendel



$f = 1$

generalisierte Koordinate: φ

$x = l \sin\varphi \qquad \dot{x} = l \cos\varphi \, \dot{\varphi}$

$z = -l \cos\varphi \qquad \dot{z} = l \sin\varphi \, \dot{\varphi}$

$$V = mgz = -mgl\cos\varphi$$

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot\varphi^2 + mgl\cos\varphi$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m l^2 \dot\varphi$$

$$\dot\varphi = \frac{p_\varphi}{m l^2}$$

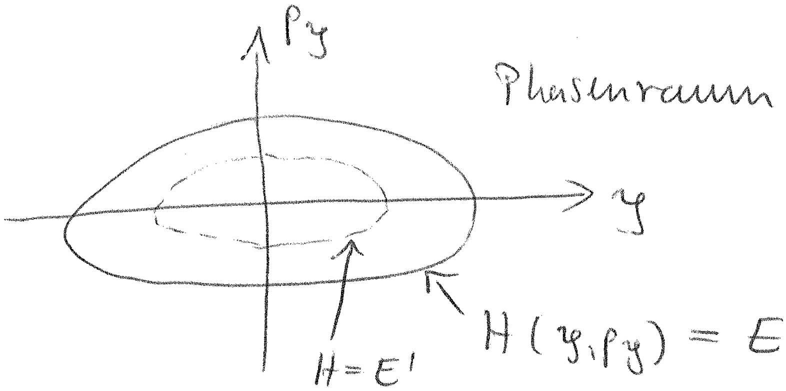
$$H = p_\varphi \dot\varphi - L = p_\varphi \frac{p_\varphi}{m l^2} - \frac{1}{2} m l^2 \frac{p_\varphi^2}{m^2 l^4} - mgl\cos\varphi$$

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi = E = \text{const}$$

---

für kleine φ ist: $\cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$

$$H(\varphi, p_\varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} + \frac{1}{2} mgl\,\varphi^2 - mgl$$



Statistik: Phasenvolumen Γ = $(2f-1)$-dim Volumen der $H = E$ - Hyperfläche

Entropie $S = k_B \ln \Gamma$

(sinnvoll für $N \to \infty$)

---

hier: Hamilton-Gleichungen

$$-\dot{p}_\varphi = \frac{\partial H}{\partial \varphi} = mgl \sin\varphi$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2}$$

p_φ eliminieren:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\dot{p}_\varphi}{ml^2} = -\frac{1}{ml^2} mgl \sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0$$

B "freies" Teilchen ($N=1$, keine ZB)

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$$

hier:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} \qquad \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m}$$

(mech = gen. Impuls)

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \vec{p}\,\dot{\vec{r}} - L = \vec{p}\cdot\frac{\vec{p}}{m} - \frac{m}{2}\frac{\vec{p}^2}{m^2} + V(\vec{r})$$

$$\boxed{H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})}$$

kanonische Gleichungen

$$-\dot{\vec{p}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \qquad \dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m}$$

zusammen:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \qquad (N\,\overline{\text{II}})$$

c) $N=1$, Kugelkoordinaten

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

liefert

$$p_r = m\dot{r} \quad p_\vartheta = mr^2\dot{\vartheta} \quad p_\varphi = mr^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}$$

(für krummlinig orthogonale Koordinaten

ist $p_n = p_n(\dot{q}_n)$ statt $p_n = p_n(\dot{\vec{q}})$)

damit folgt

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mr^2} \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\vartheta}$$

und mit

$$p_r\dot{r} + p_\vartheta\dot{\vartheta} + p_\varphi\dot{\varphi} = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\vartheta^2}{mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2\sin^2\vartheta}$$

ist

$$\boxed{H(r,\vartheta,\varphi,p_r,p_\vartheta,p_\varphi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\vartheta}\right) + V(r,\vartheta,\varphi)}$$

für $V = V(r)$ ist z.B.

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad (\varphi \text{ zyklisch}) \qquad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \qquad p_\varphi = \text{const}$$

d.h. $mr^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} = \text{const}$ $\quad (l_z = \text{const})$

D Teilchen im elektromagnetischen Feld

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\,\Phi(\vec{r},t) + q\,\dot{\vec{r}}\,\vec{A}(\vec{r},t)$$

(q: Ladung, $\Phi, \vec{A}$: skalares und Vektorpotenzial)

generalisierter Impuls

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + q\,\vec{A}(\vec{r},t)$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{1}{m}\vec{p} - \frac{q}{m}\vec{A}(\vec{r},t) = \dot{\vec{r}}(\vec{r},\vec{p},t)$$

damit

$$H = \vec{p}\dot{\vec{r}} - L = \vec{p}\left(\frac{1}{m}\vec{p} - \vec{A}\frac{q}{m}\right) - \frac{m}{2}\left(\frac{1}{m}\vec{p} - \frac{q}{m}\vec{A}\right)^2$$

$$+ q\,\Phi - q\left(\frac{1}{m}\vec{p} - \frac{q}{m}\vec{A}\right)\vec{A}$$

$$= \frac{\vec{p}^2}{m} - \frac{q}{m}\vec{p}\vec{A} - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{2}{2}\frac{q}{m}\vec{p}\vec{A} - \frac{q^2}{2m}\vec{A}^2$$

$$+ q\,\Phi - \frac{q}{m}\vec{p}\vec{A} + \frac{q^2}{m}\vec{A}^2$$

$$= \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{q}{m}\vec{p}\vec{A} + \frac{q^2}{2m}\vec{A}^2 + q\,\Phi$$

$$\boxed{H(\vec{r},\vec{p},t) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\,\vec{A}(\vec{r},t)\right)^2 + q\,\Phi(\vec{r},t)}$$

beachte: $\vec{p} \neq m\dot{\vec{r}}$

es gilt

$$H = H_{frei}(\vec{r},\vec{p})\Big|_{\vec{p}\mapsto\vec{p}-q\vec{A}} + q\,\Phi(\vec{r},t)$$

7.3 Poisson-Klammer

Elemente einer physikalischen Theorie (KM, QM)

1) <u>Zustand</u>

(Angabe von Größen zur eindeutigen Charakterisierung des Systems)

Hamilton: $(q, p) = \bar{a}$

Zustandsraum: Phasenraum $\{\bar{a}\}$

2) <u>Observable</u>

(messbare physikalische Größen)

Bsp: $H, \vec{L}, \vec{P}_{tot} = \sum_i \vec{p}_i, \ldots$

KM: Observable sind Funktionen des Zustands

$$A = A(\bar{a}) = A(q, p)$$

Bsp: $H = H(q,p)$, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, etc

evtl. mit expliziter Zeitabhängigkeit $A = A(\bar{a}, t)$

Bsp: $H = H(q, p, t)$ (rheonome ZB)

$\vec{R} - \frac{\vec{P}}{M} \cdot t$ (Erhaltungsgröße an den speziellen Galilei-Transf.)

$V(\vec{r}, t) = q \cdot \Phi(\vec{r}, t)$

etc.

QM: Zustand $|\psi\rangle$ Vektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

Zustandsraum $\{|\psi\rangle\} = \mathcal{H}$ Hilbert-Raum

Observable $\hat{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linearer Operator

3) Dynamische Grundgleichung

für den Zustand

$$\pi = \pi(t)$$

gegeben durch

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}$$

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}$$

für die Observable

$$A = A(t)$$

gegeben durch

?

Zusammenhang: Wert von A im Zustand π z.Zt. t

$$A(\pi(t), t) = A(t)$$

$$A(\pi(t)) = A(t) \quad \text{(ohne expl. Zeitabh.)}$$

es gilt

$$\frac{d}{dt} A(t) = \frac{d}{dt} A(\pi(t), t) = \frac{d}{dt} A(q(t), p(t), t)$$

$$= \sum_n \frac{\partial A}{\partial q_n} \dot{q}_n + \sum_n \frac{\partial A}{\partial p_n} \dot{p}_n + \frac{\partial A}{\partial t}$$

Def: Seien $A(q,p,t)$, $B(q,p,t)$ (skalare) Observable

$$\{A,B\}_{q,p} := \sum_n \left(\frac{\partial A}{\partial q_n}\frac{\partial B}{\partial p_n} - \frac{\partial A}{\partial p_n}\frac{\partial B}{\partial q_n} \right)$$

Poisson-Klammer von A mit B

damit gilt

$$\frac{dA}{dt} = \{A,H\}_{q,p} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

Poisson-Klammer unabhängig von der Wahl der generalisierten Koordinaten und Impulse! (s.u.)
also gilt

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \{A,H\} + \frac{\partial A}{\partial t}}$$

koordinatenunabhängige Bewegungsgleichung für Observable
H bestimmt die Dynamik!

QM Grundgleichung für

Zustand

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

Schrödinger-Gleichung

Observable

$$i\hbar \frac{d}{dt}\hat{A}(t) = [\hat{A},\hat{H}](t) + i\hbar \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$$

Heisenberg-Gleichung

Kommutator $[\hat{A},\hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

KM Observable = Zustandsfunktionen

→ q_n, p_n sind spezielle Observable

→ Grundgleichung für Zustände und Observable identisch !?

symmetrisch in $q \leftrightarrow p$!

Test:

$$\dot{q}_n = \frac{d}{dt} q_n = \{q_n, H\} + \cancel{\frac{\partial}{\partial t} q_n} = \{q_n, H\}_{qp}$$

$$= \sum_m \left(\underbrace{\frac{\partial q_n}{\partial q_m}}_{\delta_{nm}} \frac{\partial H}{\partial p_m} - \underbrace{\frac{\partial q_n}{\partial p_m}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial q_n} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_m} \quad ✓$$

analog: $\dot{p}_m = \dots = -\dfrac{\partial H}{\partial q_m}$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}_n &= \{q_n, H\} \\ \dot{p}_n &= \{p_n, H\} \end{aligned}}$$

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$ Berechnung von $\{A, H\}$?

rein algebraisches Problem!

Poisson-Klammer-Algebra:

es gilt (fundamentale Poisson-Klammern)

$$\boxed{\begin{aligned} &\{q_n, q_m\} = 0 \qquad \{p_n, p_m\} = 0 \\ &\{q_n, p_m\} = \delta_{nm} \qquad \forall\, n, m = 1, \dots, f \end{aligned}}$$

z.B. ObdA

$$\{q_n, p_m\} = \sum_k \left(\frac{\partial q_n}{\partial q_k} \frac{\partial p_m}{\partial p_k} - \frac{\partial q_n}{\partial p_k} \frac{\partial p_m}{\partial q_k} \right)$$

$$= \sum_k \left(\delta_{nk} \delta_{mk} - 0 \right) = \delta_{nm}$$

für eine beliebige Funktion F gilt:

$$\boxed{\{q_n, F(q)\} = 0 \qquad \{p_n, F(p)\} = 0}$$

z.B. ObdA

$$\{q_n, F(q)\} = \sum_m \left(\frac{\partial q_n}{\partial q_m} \underbrace{\frac{\partial F(q)}{\partial p_m}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial q_n}{\partial p_m}}_{=0} \frac{\partial F(q)}{\partial q_m} \right) = 0$$

weiter gilt

$$\boxed{\{q_n, F(p)\} = \frac{\partial F(p)}{\partial p_m} \qquad \{p_n, F(q)\} = -\frac{\partial F(q)}{\partial q_n}}$$

z.B.

$$\{q_n, F(p)\} = \sum_m \frac{\partial q_n}{\partial q_m} \frac{\partial F(p)}{\partial p_m} - 0 = \frac{\partial F(p)}{\partial p_m}$$

also auch

$$\{q_n, F(q,p)\} = \frac{\partial F}{\partial p_m} \qquad \{p_n, F(q,p)\} = -\frac{\partial F}{\partial q_n}$$

$$\boxed{\{q_n, \cdot\} = \frac{\partial}{\partial p_m} \qquad \{p_n, \cdot\} = -\frac{\partial}{\partial q_n}}$$

komplexe Klammern auf einfache zurückführen:

für $A(q,p,t)$, $B(q,p,t)$, $C(q,p,t)$

und $c_1, c_2, c \in \mathbb{R}$ gilt

Antisymmetrie

$$\{A,B\} = -\{B,A\}$$

Linearität

$$\{c_1 A_1 + c_2 A_2, B\} = c_1 \{A_1, B\} + c_2 \{A_2, B\}$$

Produktregel

$$\{A, BC\} = B\{A,C\} + \{A,B\}C$$

Jacobi-Identität

$$\{A,\{B,C\}\} + \{B,\{A,C\}\} + \{C,\{A,B\}\} = 0$$

(Beweise einfach, außer Jacobi-Identität)

Bsp: rein algebraische Herleitung der Bewegungsgleichung für einen harmonischen Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$\dot{q} = \{q, H\} = \{q, \frac{p^2}{2m} + V(q)\} = \{q, \frac{p^2}{2m}\}$$

$$= \frac{1}{2m}\{q, p^2\} = \frac{1}{2m}\left[p\{q,p\} + \{q,p\}p\right]$$

$$= \frac{1}{2m}(p+p) = p/m$$

$$\dot{p} = \{p, H\} = \{p, \tfrac{1}{2} m\omega^2 q^2\} = \tfrac{1}{2} m\omega^2 \cdot 2 \cdot \{p, q\} q$$

$$= - m\omega^2 \{q, p\} q = - m\omega^2 q$$

Zusammen:

$$\ddot{q} = \dot{p}/m = -\omega^2 q \qquad \ddot{q} + \omega^2 q = 0 \quad \checkmark$$

Erhaltungsgrößen:

Sei $A(q, p, \cancel{t})$ nicht explizit zeitabhängig

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{A, H\} = 0}$$

Bsp: Hamilton-Funktion (mit $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$)

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad , \text{ denn } \{H, H\} = -\{H, H\} = 0$$

Bsp: $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \quad , \text{ denn } \{L_z, H\} = 0 \qquad \text{analog } L_y, L_x$$

$$\{L_z, H\} = \{x p_y - y p_x, \tfrac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)\}$$

$$= x \{p_y, V(r)\} + p_y \{x, \tfrac{\vec{p}^2}{2m}\} - y \{p_x, V(r)\} - p_x \{y, \tfrac{\vec{p}^2}{2m}\}$$

$$= - x \frac{\partial V}{\partial y} + p_y \frac{p_x}{m} + y \frac{\partial V}{\partial x} - p_x \frac{p_y}{m}$$

$$= - x \frac{\partial V}{\partial r} \frac{y}{r} + y \frac{\partial V}{\partial r} \frac{x}{r} = 0$$

seien A, B nicht explizit zeitabhängig

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = 0 \quad \frac{dB}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\{A,B\}}{dt} = 0}$$

(Poissonscher Satz)

<u>Beweis:</u>

aus $\{A,H\} = 0 = \{B,H\}$ folgt mit Jacobi:

$$0 = \{A, \underbrace{\{B,H\}}_{=0}\} + \{B, \underbrace{\{H,A\}}_{=0}\} + \{H, \{A,B\}\}$$

dass $\{\{A,B\}, H\} = 0$ also $\frac{d}{dt}\{A,B\} = 0$

<u>Bsp.</u> $L_x, L_y = \text{const}$ für $V = V(r)$

$$\{L_x, L_y\} = \{y p_z - z p_y, z p_x - x p_z\}$$

$$= \{y p_z, z p_x\} + \{z p_y, x p_z\} - \{z p_y, z p_x\}$$

$$- \{y p_z, x p_z\}$$

$$= y \{p_z, z\} p_x + x \{z, p_z\} p_y - 0 - 0$$

$$= x p_y - y p_x = L_z$$

(leider nichts Neues)

7.4 Kanonische Transformationen

L II forminvariant unter Punkttransformationen,
d.h. für beliebiges $q = q(Q,t)$ ist

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde L}{\partial \dot Q_n} - \frac{\partial \tilde L}{\partial Q_n} = 0$$

mit $\tilde L(Q,\dot Q,t) = L(q(Q,t), \dot q(Q,\dot Q,t), t)$

---

beliebige Transformationen ("Phasentransformationen")

$$q = q(Q,P,t)$$
$$p = p(Q,P,t)$$

lassen die kanonischen Gleichungen nicht
forminvariant! (s.u.)

Def: Zwei Sätze $Q = (Q_1, .., Q_f)$ und $P = (P_1, .., P_f)$
heißen kanonische Variablen und Q und P
heißen zueinander kanonisch konjugiert, falls

$$\dot Q_n = \frac{\partial \tilde H}{\partial P_n} \qquad \dot P_n = -\frac{\partial \tilde H}{\partial Q_n}$$

mit $\tilde H(Q,P,t) = H(q(Q,P), p(Q,P), t)$

<u>Def:</u> Eine Phasentransformation $(Q,P) \mapsto (Q',P')$ heißt <u>kanonisch</u> falls

(Q,P) kanonische Variablen

$$\Longleftrightarrow$$

(Q',P') kanonische Variablen

- (q,p), also generalisierte Koordinaten und Impulse, sind (trivialerweise) kanonische Variablen, denn es gilt
$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \qquad \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}$$

- ist die Phasentransformation $(q,p) \to (Q,P)$ kanonisch, dann sind (Q,P) kanonische Variablen

---

<u>Kriterium für Kanonizität?</u>

seien (q,p) kanonisch

$$q = q(Q,P) \qquad \text{(zeitunabhängig)}$$
$$p = p(Q,P)$$

und $\tilde{H}(Q,P,t) = H(q(Q,P), p(Q,P), t)$

(Q,P) kanonisch?

z.z. $\dot{Q}_n = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial P_n} \qquad \dot{P}_n = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_n}$

$$\dot{Q}_n = \{Q_n, H\}_{q,p}$$

$Q_n = Q_n(q,p)$ als Observable auffassen

$$= \sum_m \left(\frac{\partial Q_n}{\partial q_m} \frac{\partial H}{\partial p_m} - \frac{\partial Q_n}{\partial p_m} \frac{\partial H}{\partial q_m} \right)$$

$$= \sum_m \left[\frac{\partial Q_n}{\partial q_m} \sum_k \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_m} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_m} \right) - \frac{\partial Q_n}{\partial p_m} \sum_k \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_m} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_m} \right) \right]$$

$$= \sum_k \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \cdot \{Q_n, Q_k\}_{qp} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \{Q_n, P_k\}_{qp} \right)$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}$$

analog:

$$\dot{P}_n = \sum_k \left(-\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \{Q_k, P_n\}_{qp} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \{P_n, P_k\}_{qp} \right) \stackrel{!}{=} -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k}$$

also

$$\boxed{\{Q_n, Q_k\}_{qp} = 0 \qquad \{P_n, P_k\}_{qp} = 0 \qquad \{Q_n, P_k\}_{qp} = \delta_{nk}}$$

- (hinreichendes) Kriterium für Kanonizität!
- Zusammenhang zwischen Poisson-Klammer und kanonischen Transformationen!

Universalität der Poisson-Klammer

seien (q,p) und (Q,P) kanonische Variablen

d.h. $q = q(Q,P)$, $p = p(Q,P)$ kanonisch

$$\Rightarrow \quad \boxed{\{A,B\}_{q,p} = \{A,B\}_{Q,P} =: \{A,B\}}$$

Beweis: $\{A,B\}_{qp} = \sum_n \left(\frac{\partial A}{\partial q_n}\frac{\partial B}{\partial p_n} - \frac{\partial A}{\partial p_n}\frac{\partial B}{\partial q_n} \right)$

$$= \sum_{n,k} \frac{\partial A}{\partial q_n}\left(\frac{\partial B}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial p_n} + \frac{\partial B}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_n}\right) \qquad (B = B(Q,P))$$

$$- \sum_{n,k} \frac{\partial A}{\partial p_n}\left(\frac{\partial B}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_n} + \frac{\partial B}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial q_n}\right)$$

$$= \sum_k \left(\frac{\partial B}{\partial Q_k}\{A, Q_k\}_{qp} + \frac{\partial B}{\partial P_k}\{A, P_k\}_{qp}\right)$$

speziell für $A = Q_n$ ist also $\{Q_n, B\}_{qp} = \frac{\partial B}{\partial P_n}$

speziell für $A = P_n$ ist also $\{P_n, B\}_{qp} = -\frac{\partial B}{\partial Q_n}$

somit auch $\{A, Q_k\}_{qp} = -\frac{\partial A}{\partial P_k}$

$$\{A, P_k\}_{qp} = \frac{\partial A}{\partial Q_k}$$

einsetzen:

$$\{A,B\}_{qp} = \sum_k \left(\frac{\partial B}{\partial Q_k}\left(-\frac{\partial A}{\partial P_k}\right) + \frac{\partial B}{\partial P_k}\frac{\partial A}{\partial Q_k}\right)$$

$$= \{A,B\}_{QP} \qquad \checkmark$$

7.5 Erzeugende

fundamentale Poisson-Klammern ($\{Q_m, Q_n\} = 0$, $\{P_n, P_m\} = 0$, $\{Q_m, P_n\} = \delta_{mn}$) Kriterium für Kanonizität, aber:

praktische Konstruktion kanonischer Transformationen?

betrachte Differenzial

$$\sum_n p_n \, dq_n + \sum_n Q_n \, dP_n = \delta F$$

δF ist totales Differenzial $\Leftrightarrow \exists F(q,P): dF = \delta F$

$\Leftrightarrow$ Integrabilitätsbedingungen

$\nearrow$

fundamentale Poisson-Klammern!

also: $\boxed{\begin{array}{l} (q,p) \mapsto (Q,P) \text{ ist kanonisch, falls} \\ \exists F(q,P) \text{ („Erzeugende") mit} \\ p_n = \dfrac{\partial F}{\partial q_n} \quad Q_n = \dfrac{\partial F}{\partial P_n} \end{array}}$

- $F(q,P)$ beliebig vorgeben
- $p_n = \partial F / \partial q_n = p_n(q,P)$ $\quad Q_n = Q_n(q,P)$ berechnen
- auflösen: $Q = Q(q,p)$ $\quad P = P(q,p)$

zum Beweis δF mit dQ_n, dP_n ausdrücken:

$$\delta F = \sum_n p_n \left(\sum_k \frac{\partial q_n}{\partial Q_k} dQ_k + \frac{\partial q_n}{\partial P_k} dP_k \right) + \sum_k Q_k dP_k$$

$(n \leftrightarrow k)$

$$\delta F = \sum_k \left(\sum_n p_n \frac{\partial q_n}{\partial Q_k} \right) dQ_k + \sum_k \left(\sum_n p_n \frac{\partial q_n}{\partial P_k} + Q_k \right) dP_k$$

Integrabilitätsbedingungen

1) $$\frac{\partial}{\partial Q_k} \left(\sum_n p_n \frac{\partial q_n}{\partial P_{k'}} + Q_{k'} \right) = \frac{\partial}{\partial P_{k'}} \left(\sum_n p_n \frac{\partial q_n}{\partial Q_k} \right)$$

$$\delta_{kk'} + \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial Q_k} \frac{\partial q_n}{\partial P_{k'}} + \sum_n p_n \frac{\partial^2 q_n}{\partial P_{k'} \partial Q_k} = \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial P_{k'}} \frac{\partial q_n}{\partial Q_k} + \sum_n p_n \frac{\partial^2 q_n}{\partial P_{k'} \partial Q_k}$$

$$\Leftrightarrow \sum_n \left(\frac{\partial q_n}{\partial Q_k} \frac{\partial p_n}{\partial P_{k'}} - \frac{\partial q_n}{\partial P_{k'}} \frac{\partial p_n}{\partial Q_k} \right) = \delta_{kk'}$$

mit $$\frac{\partial q_n}{\partial Q_k} = -\{P_k, q_n\} = \{q_n, P_k\} = \frac{\partial P_k}{\partial p_n}$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial P_{k'}} = \{Q_{k'}, p_n\} = -\{p_n, Q_{k'}\} = \frac{\partial Q_{k'}}{\partial q_n}$$

$$\frac{\partial q_n}{\partial P_{k'}} = \{Q_{k'}, q_n\} = -\{q_n, Q_{k'}\} = -\frac{\partial Q_{k'}}{\partial p_n}$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial Q_k} = -\{P_k, p_n\} = \{p_n, P_k\} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_n}$$

folgt $\sum_n \left(\frac{\partial Q_{k'}}{\partial q_n} \frac{\partial P_k}{\partial p_n} - \frac{\partial Q_{k'}}{\partial p_n} \frac{\partial P_k}{\partial q_n} \right) = \delta_{kk'}$

also $\{ Q_{k'}, P_k \} = \delta_{kk'}$

2), 3) $\partial/\partial Q_k (\cdots) = \partial/\partial Q_{k'} (\cdots)$ $\partial/\partial P_k (\cdots) = \partial/\partial P_{k'} (\cdots)$

liefern $\{ Q_k, Q_{k'} \} = 0 = \{ P_k, P_{k'} \}$ ✓

Bsp: $F(q, P) = \sum_n q_n P_n$

$$\Rightarrow \quad p_n = \frac{\partial F}{\partial q_n} = P_n$$

$$Q_n = \frac{\partial F}{\partial P_n} = q_n$$

auflösen:

$$Q_n = q_n$$
$$P_n = p_n$$
(identische Transformation)

Bsp: $F(q, P) = \sum_n f_n(q) P_n$ mit f_n beliebig

$$\Rightarrow \quad p_n = \frac{\partial F}{\partial q_n} = \sum_m \frac{\partial f_m(q)}{\partial q_n} P_m \quad , \quad P_n = P_n(q, p)$$

$$Q_n = \frac{\partial F}{\partial P_n} = f_n(q)$$

beliebige Punkttransformation!

(die Klasse der kanonischen Transformationen ist also größer als die Klasse der Punkttransformationen) verschiedene Arten von Erzeugenden

$\exists\ F(q,P)$ mit $dF = \sum_n p_n dq_n + \sum_n Q_n dP_n$

$\Updownarrow \quad F' = F - \sum_n Q_n P_n$ ("Legendre-Transf.")

$\exists\ F'(q,Q)$ mit $dF' = dF - \sum_n Q_n dP_n - \sum_n P_n dQ_n$

$$dF' = \sum_n \left(p_n dq_n + Q_n dP_n - Q_n dP_n - P_n dQ_n \right)$$

$$dF' = \sum_n \left(p_n dq_n - P_n dQ_n \right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (q,p) \mapsto (Q,P) \text{ ist kanonisch, falls} \\ \exists\ F'(q,Q) \text{ mit } p_n = \dfrac{\partial F'}{\partial q_n} \quad P_n = -\dfrac{\partial F'}{\partial Q_n} \end{array}}$$

Bsp: $F' = \sum_n q_n Q_n$

$$\Rightarrow \quad p_n = \frac{\partial F'}{\partial q_n} = Q_n$$

$$P_n = -\frac{\partial F'}{\partial Q_n} = -q_n$$

Vertauschung von "Koordinaten" und "Impulsen"!

analog: $F''(p,P)$, $F'''(p,Q)$

praktischer Nutzen?

<u>Bsp</u>: harmonischer Oszillator

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

Vereinfachung des Problems durch kan. Trsf. mit Erzeugender

$$F'(q,Q) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot Q$$

damit

$$p = \frac{\partial F'}{\partial q} = m\omega \cot Q \cdot q$$

$$P = -\frac{\partial F'}{\partial Q} = \frac{1}{2} m\omega q^2 \frac{-1}{\sin^2 Q}$$

auflösen:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \qquad p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q$$

damit ist

$$\tilde{H}(Q,P) = H(q(Q,P), p(Q,P))$$

$$= \frac{1}{2m} 2Pm\omega \cos^2 Q + \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{2P}{m\omega} \sin^2 Q$$

$$= \omega P \Rightarrow Q \text{ zyklisch}$$

kanonische Gleichungen trivial

$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 \qquad P = P_0 = \text{const}$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \omega \qquad Q = \omega t + Q_0$$

Rücktransformation

$$q = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}} \sin(\omega t + Q_0)$$

$$p = \sqrt{2P_0 m\omega} \cos(\omega t + Q_0)$$

Frage: Kann eine kanonische Transformation immer so konstruiert werden, dass das neue Problem $\tilde{H}$ trivial ist?

→ <u>Hamilton-Jacobi-Theorie</u>

setze an $F = F(q, P)$, also

$$p_n = \frac{\partial F}{\partial q_n} \qquad Q_n = \frac{\partial F}{\partial P_n}$$

wobei die Erzeugende aus der <u>Hamilton-Jacobi-DGL</u> zu bestimmen ist:

$$\boxed{H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial F}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q_f}\right) = 0 \qquad \forall q, P}$$

$P = (P_1, \dots, P_f)$ Parameter bzgl HJ-DGL dann ist

$$\tilde{H}(Q,P) = H(q(Q,P), p(Q,P))$$

$$= H\left(q(Q,P), \frac{\partial F}{\partial q}(q(Q,P), P)\right) \qquad (F \text{ Erzeugende})$$

$$= 0 \qquad (\text{HJ-DGL}) \qquad \forall Q,P \text{ oder } \forall q,P$$

also

$$\dot{Q}_n = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_n = Q_0$$

$$\dot{P}_n = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_n = P_0$$

<u>HJ-DGL</u>: (i. allg.) <u>nichtlineare</u> partielle DGL in F für $q = (q_1, \dots, q_f)$: <u>nicht trivial</u>