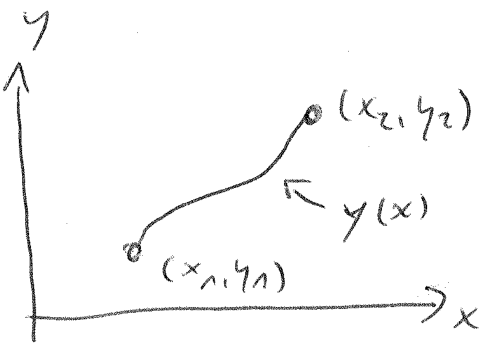
# 6 Hamilton-Prinzip

mathematische Vorbereitung

## 6.1 Variationsrechnung

einfaches Problem:

kürzeste Verbindung zwischen $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$?




Kurvenlänge

$$I = \int ds = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

$I$ ist ein <u>Funktional</u> von $y(x)$

$$y(x) \in D = \left\{ y(x) \,\middle|\, \text{„}y \text{ glatt“},\ y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2 \right\}$$

$$y(x) \longmapsto I[y(x)] \in \mathbb{R}$$

Problem:

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, L(y'(x)) \stackrel{!}{=} \min$$

allgemeiner:

notwendig, da $I[\cdot\cdot] \in \mathbb{R}$

$$I[y(x)] = \overbrace{\int}\! dx \; \underbrace{L(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots)} \overset{!}{=} \text{extr.}$$

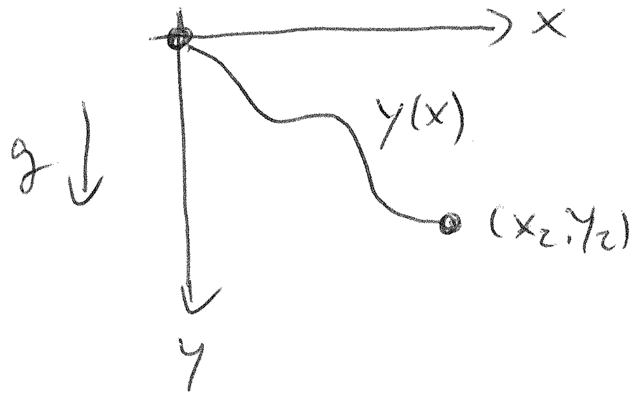
(bel.) Funktion <u>lokaler</u> Kurveneigenschaften

Funktion<u>al</u> der gesamten Kurveneigenschaften

---

<u>Bsp</u>: Brachystochronenproblem

Masse gleitet auf Draht, $y = y(x)$, von $(x_1, y_1) = 0$ nach $(x_2, y_2)$ im Schwerefeld, Anfangsgeschw. $= 0$




$$E = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - mgy \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gy} \quad \text{z. Zt. } t$$

$$E = 0 \quad \text{z. Zt. } t = 0 \; (y = 0) \qquad\qquad (y = y(t))$$

$\Rightarrow$ benötigte Zeit

$$\int_0^{t_2} dt = \int \frac{ds}{v} = \int_0^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\frac{1}{\sqrt{2gy(x)}}\,dx$$

$$= I[y(x)] \qquad \text{Problem: } I \overset{!}{=} \min$$

noch allgemeiner (z.B. Optimierung von Flächen)

$$I[y(x_1, x_2, ..)] = \int dx_1 \int dx_2 .. L\left(x_1, x_2, .., y(x_1, x_2 ..), \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, ..\right)$$

oder (s.u.)

$$I[y_1(x), y_2(x), ..] = \int dx \; L(x, y_1(x), y_2(x), .., y_1'(x), y_2'(x), ..)$$

---

hier zunächst

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; L(x, y(x), y'(x)) \overset{!}{=} \min$$

mit $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ $\rightarrow$ Def. bereich $D$

sei $y(x)$ die Lösung, dann ist

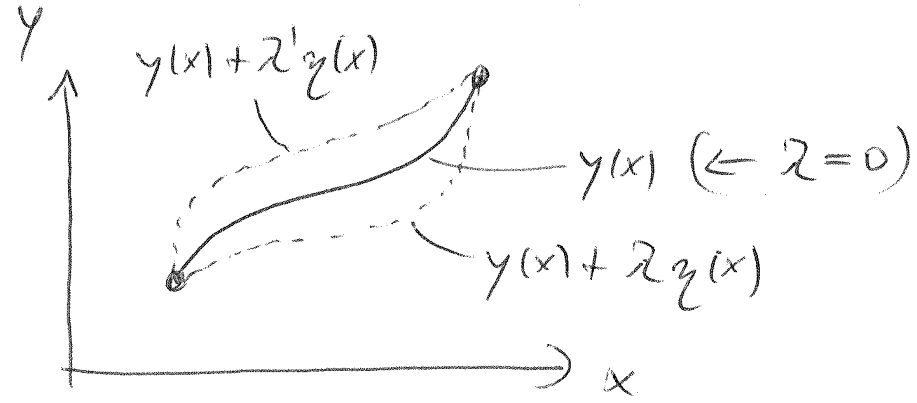
$$I[y(x) + \lambda \eta(x)] \geq I[y(x)] \quad \forall \lambda$$

und $\eta(x)$ mit $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ beliebig

$I(\lambda) := I[y(x) + \lambda \eta(x)]$ ist eine Funktion

$$\boxed{\begin{array}{l} I[y(x)] \text{ stationär } \Leftrightarrow \\ \dfrac{dI(\lambda)}{d\lambda}(\lambda = 0) = 0 \text{ für beliebiges } \eta(x) \end{array}}$$

stationär: min, max, Wendepunkt




es gilt

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \int_{x_1}^{x_2} dx \, L(x, y(x) + \lambda \eta(x), y'(x) + \lambda \eta'(x)) \Big|_{\lambda=0}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{d}{d\lambda} L(\cdots) \Big|_{\lambda=0}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x) + \lambda \eta(x), y'(x) + \lambda \eta'(x)) \cdot \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial y'}(\cdots\cdots) \cdot \eta'(x) \right] \Big|_{\lambda=0}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) \cdot \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \frac{d}{dx} \eta(x) \right]$$

$\uparrow$ partielle Integration

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial L}{\partial y}(\cdots) - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'}(\cdots) \right] \cdot \eta(x)$$

Randterm:

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \cdot \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

denn $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$

ansonsten ist $\eta(x)$ beliebig! also:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}(x, y, y') = 0}$$

Euler-Lagrange-Gleichung

---

Bsp: $I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'(x)^2}$

$$L(x, y, y') = L(y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \text{es bleibt } \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{d}{dx}\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = \text{const} \quad \Rightarrow y'(x) = \text{const}$$

$$\Rightarrow y(x) = ax + b$$

$a, b$ werden durch die 2 Randbedingungen

$y(x_1) = y_1, \ y(x_2) = y_2$ festgelegt

Fazit: $I[y]$ stationär $\Leftrightarrow$ Euler-Gleichung

kompaktere Herleitung?

$$y(x) + \lambda \eta(x) = y(x) + \frac{d}{d\lambda}\left(y(x) + \lambda\eta(x)\right)\Big|_{\lambda=0} \cdot \lambda + \cdots$$

$$= y(x) + \eta(x)\, d\lambda + \cdots$$

Variation der Bahn: $\delta y(x) = \eta(x)\, d\lambda$

(infinitesimal, 1. Ordnung, glatt, Funktion von $x$,
$\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$)

Variation des Funktionals: $\delta I$

$$I[y] = I[y]\Big|_{\lambda=0} + \underbrace{\frac{d}{d\lambda} I[y] \cdot d\lambda}_{\delta I} + \cdots$$

also gilt

$$I[y(x)] \text{ stationär} \Leftrightarrow \delta I[y(x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = \delta \int_{x_1}^{x_2} dx\, L(x, y, y')$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx\, \delta L(x, y, y')$$

$$= \int dx \left(\frac{\partial L}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y'\right)$$

$$\delta y'(x) = ?$$

$$y'(x) + \lambda \eta'(x) = y'(x) + \underbrace{\frac{d}{d\lambda}\left(y'(x) + \lambda \eta'(x)\right)\Big|_{\lambda=0} \cdot d\lambda}_{\delta y'(x)} + \dots$$

$$\delta y'(x) = \eta'(x)\, d\lambda = \frac{d}{dx}\left(\eta(x)\, d\lambda\right) = \frac{d}{dx}\, \delta y(x)$$

---

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \int dx \left( \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y \right)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial L}{\partial y} \delta y - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y \right)$$

(part. Int., Randterm $=0$)
$\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \delta y$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'}$$

- allgemeinere Variationsprobleme folgen gleichem Schema
- Minimum, Maximum? $\rightarrow$ 2. Ableitung berechnen

## 6.2 Prinzip der stationären Wirkung

Postulat: (ersetzt N II bzw. d'Alembertsches Prinzip)

gegeben: konservatives System, N Teilchen
K holonome ZB $f_s(x_1,..,x_{3N},t)=0 \quad s=1,..,K$
d.h. $x_j = x_j(q,t)$ mit $q=(q_1,..,q_f)$, $f=3N-K$
unabhängige generalisierte Koordinaten

Die Bahn im Konfigurationsraum

$$q(t) = (q_1(t),..,q_f(t))$$

wird bestimmt durch

1) 2f Anfangsbedingungen

$$q(t_0) = q_0 \qquad \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0$$

oder

2f Randbedingungen

$$q(t_1) = q_1 \qquad q(t_2) = q_2$$

und

2) Stationarität des Wirkungsfunktionals:

$$\delta S[q(t)] = 0$$

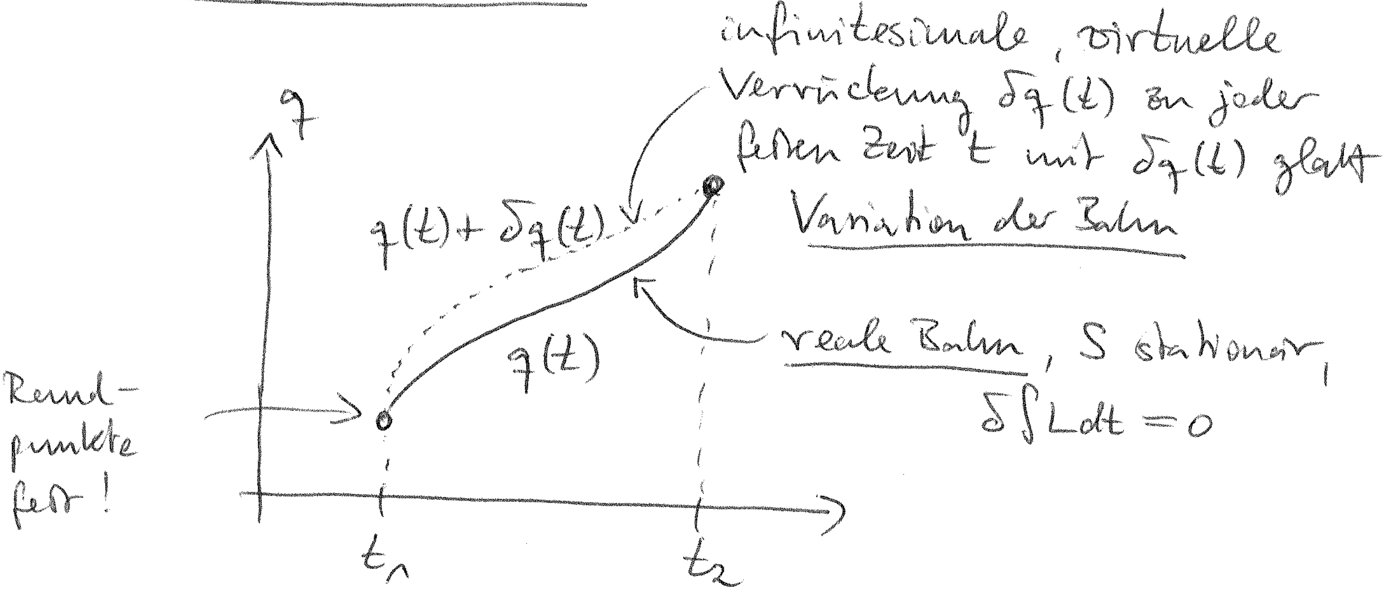
„Prinzip der stationären Wirkung", „Hamilton-Prinzip" hier erst

Wirkung = Energie × Zeit

$$S[q(t)] := \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

$$D = \{ q(t) \mid q(t_1) = q_1,\ q(t_2) = q_2,\ q(t) \text{ „glatt"} \}$$

<u>Wirkungsfunktional</u>




$$\delta S[q(t)] = 0 \iff \delta S[q_1(t), \dots, q_f(t)] = 0$$

$$\iff 0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$$

$$= \int dt\, \delta L(\cdots)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{n=1}^{f} \left( \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \underbrace{\delta \dot{q}_n}_{\frac{d}{dt}\delta q_n} \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{n=1}^{f} \left( \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta q_n \right)$$

part. Int

und $\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta q_n \right|_{t_1}^{t_2} = 0$ wegen $\delta q_n(t_1) = \delta q_n(t_2) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{n=1}^{f} \left( \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \delta q_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0 \qquad (L\,\mathrm{II})$$

$\delta q_n$ beliebig und unabhängig

$\delta S = 0$ : Variationsprinzip (vs. diff. Prinzipien)
koordinatenunabhängige Formulierung
nicht anschaulich ($L$ und $S$ ohne direkte phys. Bedeutung)
Bezug zu QM, QFT, VT-Theorie

## 6.3 Anwendungen des Hamilton-Prinzips

### 1) mechanische Eichtransformationen

$L\,\mathrm{II}$ sind invariant unter

$$L \mapsto L' = L + \frac{d}{dt}\Lambda(q,t)$$

Beweis: (mit Hamilton-Prinzip)

$$L\,\mathrm{II} \quad \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta S[q(t)] = 0$$

$$L\,\mathrm{II}' \quad \frac{\partial L'}{\partial q_n} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta S'[q(t)] = 0$$

$$S'[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L'(q,\dot{q},t)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt}\Lambda(q,t) \right)$$

$$= S[q(t)] + \Lambda(q(t_2),t_2) - \Lambda(q(t_1),t_1)$$

$\delta$-Variation lässt $q(t_1)$, $q(t_2)$ fest

also: $\delta S[q(t)] = \delta S'[q(t)]$ ✓

und: <u>nur</u> ein Term der Form $\frac{d}{dt}\Lambda(q,t)$ liefert keinen Beitrag bei Variation des Wirkungsfunktionals!

Hamilton-Prinzip <u>erklärt</u> die „Eichfreiheit"

## 2) Punkttransformationen

$L\,\overline{\text{II}}$ forminvariant unter $q \mapsto q'$, $q = q(q',t)$

<u>Beweis:</u> (mit Hamilton-Prinzip)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \qquad n = 1,\dots,f \qquad \Leftrightarrow$$

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\ \underbrace{L(q, \dot{q}, t)}_{\substack{L(q(q',t),\ \dot{q}(q',\dot{q}',t),\ t) \\ =: L'(q', \dot{q}', t)}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\ L'(q', \dot{q}', t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_n'} - \frac{\partial L'}{\partial q_n'} = 0$$

- kurzer, klarer Beweis
- beachte $q_n$ unabhängig $\Leftrightarrow$ $q_n'$ unabhängig
- $q(t_i) = q_i \Leftrightarrow q'(t_i) = q_i'$

  (Randbedingungen sind mitzutransformieren)

## 3) Berücksichtigung von ZB

K holonome ZB $f_s(x,t) = 0 \qquad s = 1, \dots, K$

d.h. $\quad \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \sum_j \frac{m_j}{2} \dot{x}_j^2 - U(x_1, \dots, x_{3N})$

keine gültige Lagrange-Funktion $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \neq 0$

i. allg.

aber:

$$\delta \int \tilde{L}(x, \dot{x}, t)\, dt = 0 \qquad \text{gültig}$$

falls $\delta$ = Variation der Bahn, die mit ZB verträglich ist!

denn:

nicht unabhängig

$$0 \overset{?}{=} \delta S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^{3N} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_j} \right) \delta x_j$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j (F_j - m_j \ddot{x}_j)\, \delta x_j$$

$\delta x_j = \delta x_j(t)$ Variation der Bahn

spezielle Variation: $\delta x_j(t) = \delta x_j \cdot h(t)$

zeitunabhängige virtuelle Verrückung

beliebige Funktion mit $h(t_1) = h(t_2) = 0$

$h(t)$ beliebig, ~~al~~so:

$$\delta S[x(t)] = 0 \iff \sum_j (F_j - m_j \ddot{x}_j)\, \delta x_j = 0$$

(d'Alembertsches Prinzip)

<u>Fazit:</u> $\delta S = 0$ kann auch in beliebigen Koordinaten ausgewertet werden, falls ZB durch entsprechend eingeschränkte Variation berücksichtigt werden!

# 4) Nichtholonome ZB

differenzielle ZB

$$\sum_j a_{sj}\, dx_j + b_s\, dt = 0 \qquad s = 1, .., K$$

$$a_{sj} = a_{sj}(x,t) \quad b_s = b_s(x,t)$$

es folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left( \sum_s a_{sj} \lambda_s \right) \delta x_j = 0$$

$\forall\ \lambda_s = \lambda_s(x, \dot{x}, t) \quad s = 1, .., K$

$\delta x_j$ : virtuelle Verrückung z. Zt. $t$ $\left( \delta x_j = \delta x_j(t) \right)$
(inf., momentan, respektiert ZB)

also gilt auch $\delta S[x(t)] = 0 \implies$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^{3N} \left( \frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} + \sum_s a_{sj} \lambda_s \right) \delta x_j = 0$$

für virtuelle Verrückungen $\delta x_j$ mit $\delta x_j(t_1) = \delta x_j(t_2) = 0$

also auch für

$$\delta x_j(t) = \delta x_j \cdot h(t)$$

mit

$h(t)$ beliebig (aber $h(t_1) = h(t_2) = 0$)

$\Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^{3N} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_j} + \sum_s a_{sj} \lambda_s \right) = 0$$

Aufteilung der Summe:

$$j = \underbrace{1, \ldots, 3N-K}, \underbrace{3N-K+1, \ldots, 3N}$$

verbleibende $3N-K = f$ Verrückungen können als unabhängig gesehen werden

$K$ Summanden $= 0$ durch Wahl der $K$ Lagrange-Parameter $\lambda_s$

also: $(\ldots) = 0 \quad \forall j$

d.h.

$\delta S = 0$ für mit den differenziellen ZB kompatiblen Variationen der Bahn

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_j} + \sum_s a_{sj} \lambda_s = 0 \qquad (L\,I)$$

## 5) Pfadintegral und Quantenmechanik

QM: Konzept der Teilchenbahn sinnlos:
Ort und Impuls nicht gleichzeitig scharf messbar
$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar$

statt dessen gilt: $(N=1)$
Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen bei $(\vec{r}_2, t_2)$ zu finden, falls es bei $(\vec{r}_1, t_1)$ war

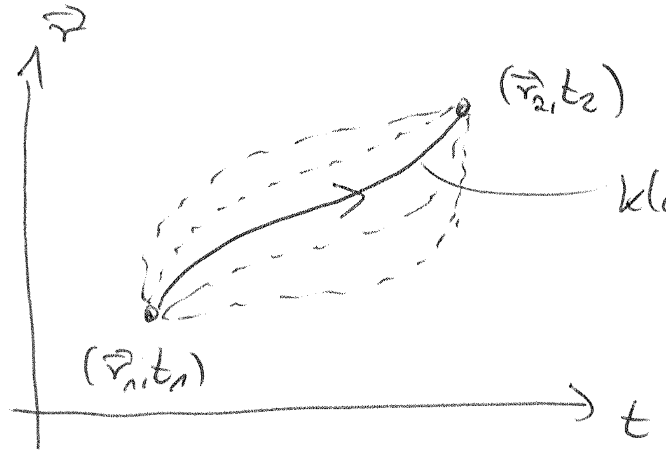
$$|\mathcal{U}(\vec{r}_2, t_2, \vec{r}_1, t_1)|^2$$

mit

$$\mathcal{U}(\vec{r}_2, t_2, \vec{r}_1, t_1) = \int d[\vec{r}(t)]\; e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{r}(t)]}$$

klassisches Wirkungsfunktional

Pfadintegral = Summe über alle denkbaren Bahnen $\vec{r}(t)$




$\hbar \to 0$: nur Bahn mit $\delta S[\vec{r}(t)] = 0$ liefert endlichen Beitrag!